T.C.

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

Yüksek Lisans Tezi

Eda TAŞ KISA

Çorum - 2022

YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

Eda TAŞ KISA

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

TEZ DANIŞMANI

Doç. Dr. Elif DALYAN

Çorum 2022

Eda TAŞ KISA tarafından hazırlanan “Yüzeylerin Sınıflandırılması” adlı tez çalışması 26/01/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa KORKMAZ (Jüri Başkanı) ……………………………………

Doç. Dr. Elif DALYAN (Danışman) ……………………………………

Prof. Dr. Ferihe ATALAN ……………………………………

Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun …/…/…… tarih ve …………….. sayılı kararı ile Eda TAŞ Kısa’nın Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Prof. Dr. Muhammed Asıf YOLDAŞ

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Eda TAŞ KISA

YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

Eda TAŞ KISA

ORCID: 0000-0001-6066-2493

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2022

ÖZET

Sınıflandırma teoremi geometrik topolojinin temel taşlarından biridir. İlk ispatı 19. yüzyılda yapılmasına rağmen bugün ki araştırmalarda da Sınıflandırma Teoremi sıkça karşımıza çıkmaktadır. Sınıflandırma Teoremi, yüzey ne kadar karmaşık olursa olsun, her tıkız yüzeyin bir sınıfı olduğunu söyler. Bu çalışmanın amacı Sınıflandırma Teoreminin (Zeeman, 1966) tarafından yapılan ispatını vermektir.

Anahtar Kelimeler: Sınıflandırma Teoremi, yüzeyler, üçgenleme, Euler karakteristik

Bilim Kodu: 20405

CLASSIFICATION OF SURFACES

Eda TAŞ KISA

ORCID: 0000-0001-6066-2493

HITIT UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL

Master of Science Thesis

January 2022

ABSTRACT

The classification theorem is fundamentals of geometric topology. Although it was discoveredin the 19th century, it is frequently used in researches of nowadays. No matter how complicatedthe surface is, the classification theorem says: Surfaces can be classified, and every compactsurface has a class. The purpose of this study is to give the proof of the Classification Theoremwhich is due to (Zeeman, 1966).

Key Terms: Classification Theorem, surfaces, triangulation, Euler characteristic

Science Code: 20405

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, öneri, yardım ve hayata dair desteğini her zaman hissettiğim, öğrencisi olmaktan büyük gurur duyduğum çok değerli hocam Doç. Dr. Elif Dalyan’a,

Hayattaki en büyük desteğim, ilham kaynağım, sevgili eşim Emin Can KISA ’ya,

Bugünlere ulaşmamda en büyük paya sahip, canımdan çok sevdiğim annem, babam ve kardeşime,

Teşekkürü bir borç bilirim.

Eda TAŞ KISA

İÇİNDEKİLER

3. BÖLÜM

YÜZEYLER

4. BÖLÜM

YARDIMCI TEOREM İSPATLARI

5. BÖLÜM

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER

Simgeler

$\chi(M)$	M yüzeyinin euler karakteristiği
v	Köşe sayısı
e	Kenar sayısı
f	Yüz sayısı
S^2	Küre

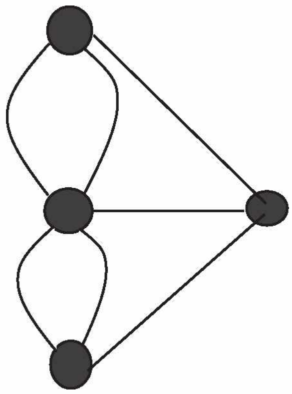
1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu tezin amacı tıkız yüzeyler için Sınıflandırma Teoremi ve ispatını yapmaktır.
Yüzey deyince, her noktası için düzlemde açık bir diske homeomorfik bir komşuluğu bulunan bir topolojik uzay aklımıza gelmelidir. Eğer bir yüzey diğerine "sürekli olarak dönüştürülebiliyorsa", yani iki yüzey arasında bir homeomorfizma varsa bu iki yüzeye birbirine denk diyeceğiz. Bu çalışmamızın temel teoreminde bahsedilen sınıflandırma, bu denklik sınıflarıdır.
A Guide to Classification Theorem for Compact Surfaces (Gallier ve Xu, 2013) kitabından, Sınıflandırma Teoreminin tarihçesini yazarsak: "İlk titizce yazılmış ispat (Brahana, 1921) tarafından yapılmıştır. Ancak bu sonucun farklı formları çok daha önceden 1861'de (Möbius, 1886) tarafından, 1866'da (Jordan, 1866) tarafından, 1888'de (Dyck, 1888) tarafından ve 1907'de (Dehn ve Heegard, 1907) tarafından bildirilmiştir."
Bu çalışmamızda, Sınıflandırma Teoremi ve ispatını (Zeeman, 1966) çalışmasını takip ederek yapacağız. Bu ispatı yaparken "Çizge kuramını" kullanacağız. Çizge kavramının temelleri Leonard Euler tarafından ilk defa 1736'dan "Köningsberg'in 7 köprüsü" sorusunun ispatında atılmıştır.
Her şey Königsberg kentinde ortaya çıkan bir sorunun Euler'in kulağına gitmesiyle başlamıştır. Şehirde eski ve yeni Pregel Nehirleri birleşerek Pregel Nehrini oluşturuyordu. Şekil 1.1'de gösterildiği gibi, bu nehirler şehri dört bölüme ayırıyor ve bu dört bölümü birleştiren yedi köprü bulunmaktaydı. Bütün köprülerden yalnız bir defa geçmek koşulu ile tüm şehir gezilebilir miydi?

Şekil 1.1. Königsberg şehri krokisi

Euler soruyu çözmek için, şehri gezmek yerine problemin çözümünü kâğıt üzerinde aramaya başladı. Euler, şehrin krokisinden, her bir ana karaya nokta ve bu ana karaları birleştiren köprüler için ilgili noktaları birleştiren birer kenar çizerek aşağıdaki Şekil 1.2 gibi bir çizge modeli üzerinden problemi çözmeye çalıştı. Bu çizime ilk çizge modeli denilebilir. Euler bu çizimle çözümü bulabildi mi? Evet çözüldü. Ancak problemin cevabının "gezilemez" olduğunu kanıtlamış oldu.
Euler bu soru ile çizge kuramına giriş yapmıştır ve çizge kuramı da topolojinin başlangıcı olmuştur.



Şekil 1.2. Königsberg çizgesi

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR

Bu kısımda temel tanım ve teoremlere değineceğiz. Temel tanım ve örnekleri yazarken Yıldıray Ozan'ın, "Türevlenebilir Manifoldlara Giriş" (Ozan, 2016) kitabından faydalandık.

Tanım 2.1. Topolojik Uzay

X bir küme olmak üzere X'in kuvvet kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan herhangi bir $\tau(X)$ alt kümesine X üzerinde bir topolojidir denir:

1. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,

2. Λ bir index kümesi olmak üzere her $\alpha \in \Lambda$ için bir $O_\alpha \in \tau$ var ise $\cup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \in \tau$,

3. Her $O_i \in \tau, \quad i = 1, ..., k$ için $\cap_{i=1}^{k} O_i \in \tau$.

Bu durumda (X, τ) ikilisine topolojik uzay, τ topolojisinin elemanlarına açık kümeler, açık kümelerin tümleyenlerine de kapalı kümeler denir.

$f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ iki topolojik uzay arasında bir fonksiyon olsun. Eğer her açık $U \in \tau_Y$ kümesinin f altındaki ters görüntüsü X içinde açık bir küme ise, yani $f^{-1}(U) \in \tau_X$ ise, f fonksiyonuna süreklidir, denir. Eğer, sürekli f fonksiyonunun sürekli bir ters fonksiyonu varsa bu fonksiyona bir homeomorfizma denir. Bu durumda (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylarına homeomorfik uzay denir.

Tanım 2.2. Hausdorff

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in birbirinden farklı her x ve y elemanı için $x \in U$ ve $y \in V$ özelliklerini sağlayan iki ayrık U ve V açık kümeleri varsa o zaman X topolojik uzayına **Hausdorff** denir.

Tanım 2.3. Açık Örtü

(X, τ) bir topojik uzay olsun. $X = \bigcup_{i\in I}$ olacak şekilde X uzayının açık kümelerinden oluşan bir $\{U_i, i \in I\}$ ailesine X'in bir açık örtüsü denir.

Tanım 2.4. Tıkızlık

Bir (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu uzaya **tıkız**, denir.

Örnekler

1. Gerçel sayılar kümesi tıkız değildir. Çünkü $\{(n-1, n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

2. Benzer şekilde $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ aralığı tıkız değildir. Çünkü $\{(1/n, 1]\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

3. $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi tıkızdır. Çünkü 0 noktasını içeren her açık küme bu kümenin sadece sonlu elemanını dışarıda bırakır ve bu sebepten dolayı bu kümenin her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü vardır.

Tanım 2.5. Bağlantılı

Bir (X, τ) topolojik uzayı boş olmayan iki açık alt kümesinin ayrık birleşimi olarak yazılamıyorsa bu uzaya **bağlantılı** denir. Bağlantılı olmayan uzaylara bağlantısız uzaylar denir.

Tanım 2.6. Taban

Bir X kümesinin, β alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu aileye X, ϕ ve β ailesinin sonlu sayıdaki elemanlarının ara kesitlerinin rastgele birleşimlerinden oluşan alt kümeleri de ekleyerek bir topoloji oluşturabiliriz. Bu topolojiye β tarafından üretilen topoloji denir. Bu durumda β ailesine bu topolojinin bir **tabanı** da denir.

Tanım 2.7. İkinci Sayılabilir

Sayılabilir bir tabana sahip olan topolojik uzaya ikinci sayılabilir topolojik uzay denir.

3. BÖLÜM

YÜZEYLER

Tanım 3.1. n-Boyutlu Manifold

X Hausdorff ve ikinci sayılabilir bir uzay olsun. Eğer X her biri $\mathbb{R}^n$'in açık bir alt kümesine homeomorfik olan açık alt kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, X'e n- boyutlu **topolojik manifold** denir.

$X = \bigcup U_\alpha$, ve $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, homeomorfizmalar ise $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ ailesine X topolojik manifoldunun bir **topolojik atlası** denir. Bu durumda boş kümeden farklı her $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ara kesiti için

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

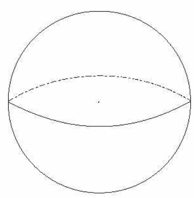
bileşke fonksiyonu $\mathbb{R}^n$nin açık alt kümelerinin bir homeomorfizması olacaktır.

Tanım 3.2. Yüzey

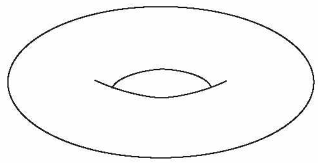
İki boyutlu bir manifolda **yüzey** denir. Daha ayrıntılı bir söyleyişle yüzey, aşağıdaki koşulları sağlayan bir topolojik uzaydır.

- Hausdorff'tur.
- Herhangi bir noktasında öyle bir açık komşuluk bulunabilir ki bu komşuluk $\mathbb{R}^2$nin açık bir alt kümesine homeomorfiktir.
- İkinci sayılabilirlik özelliğini sağlar.

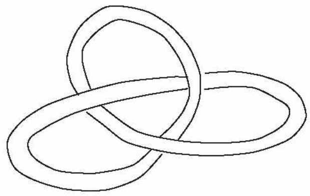
Yüzey Örnekleri:



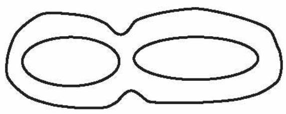
Şekil 3.1. Küre



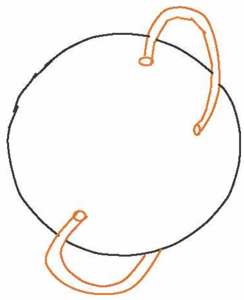
Şekil 3.2. Torus



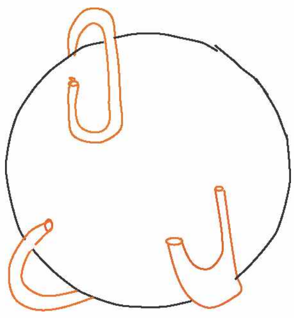
Şekil 3.3. Düğümlenmiş Torus



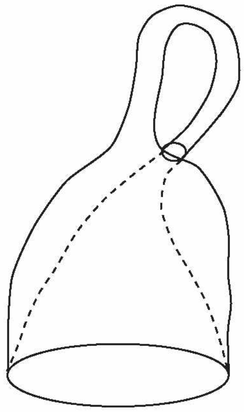
Şekil 3.4. İki Delikli Torus



Şekil 3.5. Dikilmiş İki Kulplu Küre



Şekil 3.6. Dikilmiş Üç Kulplu Küre



Şekil 3.7. Klein Şişesi

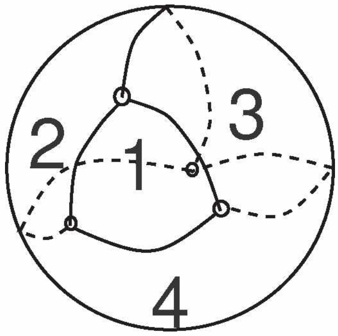
Şekil 3.1, Şekil 3.2, Şekil 3.3, Şekil 3.4, Şekil 3.5, Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 ile verdiğimiz yüzey örneklerinin hepsinin üç özelliği vardır:

- Bağlantılıdır.
- Sınır bileşeni yoktur.
- Üçgenlenebilirdir.

Şekil 3.7 ile verdiğimiz yüzey diğerlerinden farklı bir yüzeydir. Çünkü diğer yüzeyler yönlendirilebilir iken, bu yüzey yönlendirilemeyen bir yüzeydir.
Sınır bileşeni olan yüzeylere ise Möbiüs şeridi ve halka örnek olarak verilebilir.

Tanım 3.3. Üçgenlenebilir

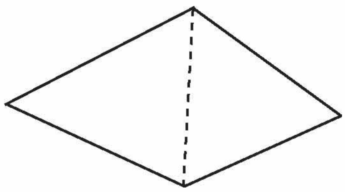
Yüzey sonlu sayıda köşe, kenar ve yüzden oluşacak şekilde parçalara ayrılabilir. Yüzeyleri üçgenlere (ancak üçgen yerine herhangi başka bir poligon da olabilir), bölme işlemine **üçgenleme** denir. Tabi ki yüzey eğimli olunca kenarlar ve yüzeyler de eğimli olacaktır. Mesela; küreyi 4 köşe, 6 eğimli kenar ve 4 tane eğimli üçgen olacak şekilde üçgenleyebiliriz (Bkz: Şekil 3.8).



Şekil 3.8. Küre yüzeyinin bir üçgenlemesi

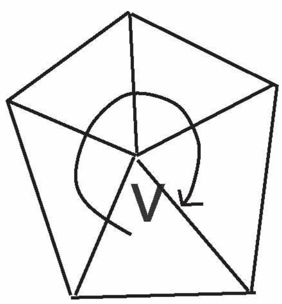
Bir yüzeyi üçgenlemenin birçok farklı yolu vardır. Ancak yüzeylerin üçgenlemelerinin ortak iki özelliği vardır:

- Her bir kenar iki üçgene (yüze) aittir.



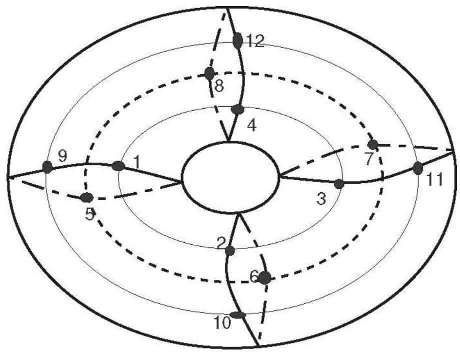
Şekil 3.9. Her bir kenar iki üçgene (yüze) aittir.

- Her bir köşe en az üç adet üçgene (yüze) aittir ve bir köşeyi ortak kabul eden üçgenler (yüzler) köşenin etrafında bir devir oluşturacak şekilde sıralanır.



Şekil 3.10. v köşesi etrafında üçgenler, devir oluşturacak şekilde sıralanmıştır.

Aşağıda torus yüzeyinin bir üçgenlemesini göreceğiz. Burada dikkat edilirse yüzler üçgen değil, dikdörtgendir. Torus yüzeyinin bu üçgenlemesinde 12 köşe, 24 kenar, 12 dikdörtgen (yüz) vardır (Bkz: Şekil 3.11).



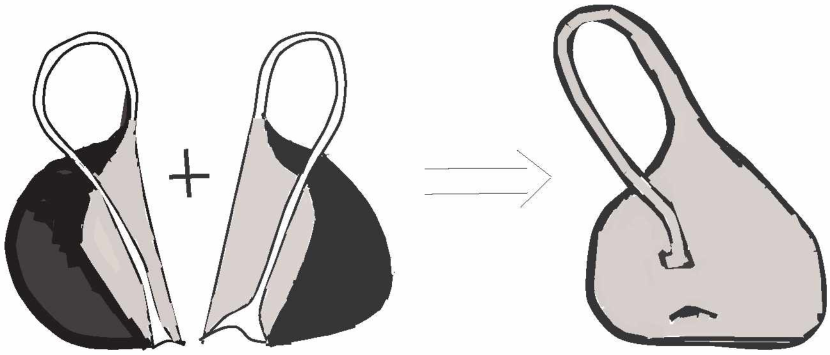
Şekil 3.11. Torus yüzeyinin bir üçgenlemesi

Yüzeylerin üçgenlenebilir olduğu (Radó, 1925) tarafından ispatlanmıştır. Bundan böyle çalışmamızda aldığımız tüm yüzeylerin bağlantılı, kapalı (sınır bileşeni yok) ve üçgenlenebilir olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 3.4. Yönlendirilebilirlik

Eğer yüzey Möbius şeridi içermiyorsa, yüzeye **yönlendirilebilir**, Möbius şeridi içeriyorsa, **yönlendirilemiyen yüzey** denir.

Klein şişesi yönlendirilemeyen bir yüzey örneğidir (Bkz: Şekil 3.7). Klein şişesinin iki adet Möbius şeridi içerdiğini görmek için onu iki parçaya bölersek, her bir parçanın birer Möbius şeridi olduğu görülebilir (Bkz: Şekil 3.7). Bu nedenle Klein şişesi sadece bir Möbius şeridi içermekle kalmaz, aynı zamanda sınırları boyunca birbirine dikilmiş iki Möbius şeridinin birleşimi olur (Bkz: Şekil 3.12).



Şekil 3.12. Klein Şişesi

Tanım 3.5. Homeomorfizma

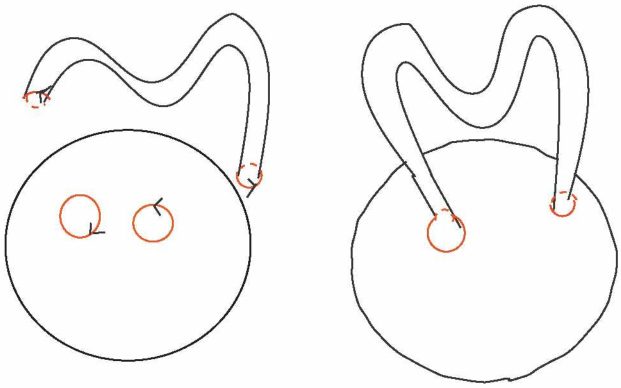
İki yüzey arasında bire bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olacak şekilde bir dönüşüm var ise, bu dönüşüme **homeomorfizma** denir ve bu iki yüzey de birbirine **homeomorfiktir** denir. Yüzey örneklerinde verdiğimiz, Şekil 3.2 ile çizdiğimiz torus ve Şekil 3.3 ile gösterdiğimiz düğümlenmiş torus yüzeyleri birbirine homeomorfiktir. Ayrıca Şekil 3.4 ve Şekil 3.5'de verilen sırasıyla, iki delikli torus ve dikilmiş iki kulplu küre yüzeyleri birbirine homeomorfiktir. Diğer verilen yüzey örnekleri birbirine homeomorfik değildir.

Sınıflandırma ne demek?

Yüzeyleri, standart yüzeylerden bir liste oluşturarak ve her yüzeyin standart yüzeylerin birine homeomorfik olduğunu kanıtlayarak sınıflandırırız. Daha farklı şekilde söylemek gerekirse eğer iki yüzey birbirine homeomorfik ise, bu yüzeyleri aynı sınıfa yerleştireceğiz. Homeomorfizma, tüm yüzeyler üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve biz de bu denklik sınıflarını liste halinde sıralayabiliriz. Topolojinin diğer sonuçları gibi sınıflandırma teoreminin kayda değer bir basitliği vardır. Çok az sayıda bulundukları için listeyi derlemek kolay olur. Yüzey örneklerini verirken çizdiğimiz 7 adet yüzey örneğinde, toplam 4 adet sınıf vardır.

Standart yönlendirilebilir cins n yüzey

Bir küreye kulp dikmek için, küreye iki tane küçük delik açın, bir silindir alın ve silindirin kenarlarıyla deliklerin sınırlarını birleştirerek dikin.

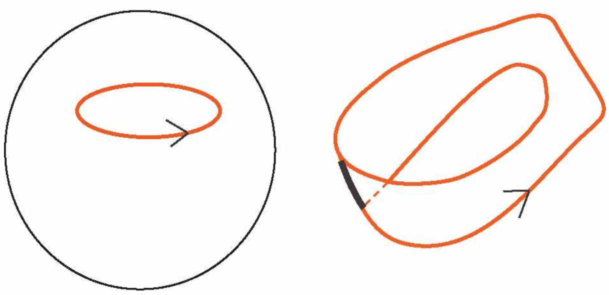


Şekil 3.13. Küreye kulp dikmek

Deliklerin sınırlarındaki oklar, dikişin hangi yöne doğru olacağını göstermektedir. Silindirin iki kenarındaki oklar aynı yöne doğru ilerlerken, deliklerin kenarlarındaki oklar aksi yöne doğru ilerlemektedir. Üzerine kulp dikilmiş bir küre ile bir torus homeomorfiktir (eğer oklardan birisinin yönü değişecek olursa Klein şişesi elde edilir). Eğer birden çok kulp dikilmesi istenirse, kürenin farklı bölgelerine dikilmelidir. Standart yönlendirilebilir cins n yüzeyini elde etmek için küre yüzeyine n tane kulp dikmek gerekir. Özel olarak, cins 0 yönlendirilebilir yüzeyi bir küre, cins 1 yönlendirilebilir yüzey ise bir torus yüzeyi olur.

Standart yönlendirilemeyen cins n yüzey

Küreye bu defa iki değil bir delik açıp, deliğin sınırı boyunca, Möbius şeridinin sınırı denk gelecek şekilde, Möbius şeridini dikiyoruz (Bkz: Şekil 3.14).

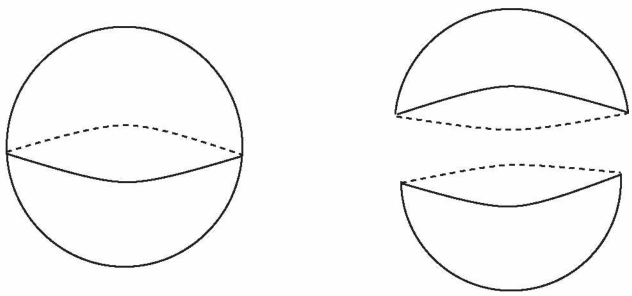


Şekil 3.14. Küreye Möbius şeridi dikmek

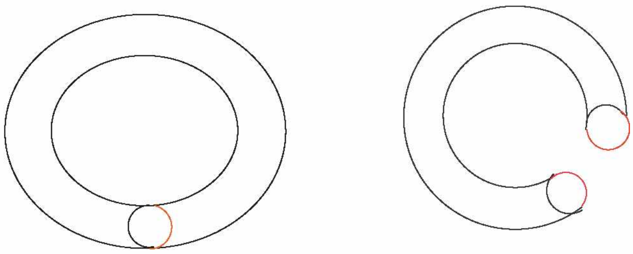
Sonuçlanan bu yüzey kendini kesen bir yüzey olur. Bu elde ettiğimiz yüzeye gerçel projektif düzlem denir. Eğer iki delik açıp, bu deliklerin her birine birer Möbiüs şeridi diktiğimizde elde edilen yüzey Klein şişesi olur. Benzer şekilde n delik açıp n Möbius şeridi eklersek yönlendirilemeyen cins n yüzeyini elde ederiz.

Tanım 3.6. Küre Gibi

M bir yüzey olsun. M yüzeyinin bir üçgenlemesini seçelim. Eğer M yüzeyinin, seçilen üçgenlemesinde, her basit kapalı eğri, yüzeyi ayıran eğri (bu eğri boyunca kesince yüzey iki parçaya ayrılıyorsa) oluyor ise bu yüzeye **küre gibi** denir. Şekil 3.16'da görüldüğü gibi, tor yüzeyi üzerinde yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğri bulabiliriz. Bu nedenle tor yüzeyi küre gibi değildir. Ancak küre, küre gibidir çünkü küre üzerinde alacağınız her basit kapalı eğri, yüzeyi iki parçaya ayıracaktır.



Şekil 3.15. Küre gibi (yüzey üzerindeki her basit kapalı eğri yüzeyi ayırır)



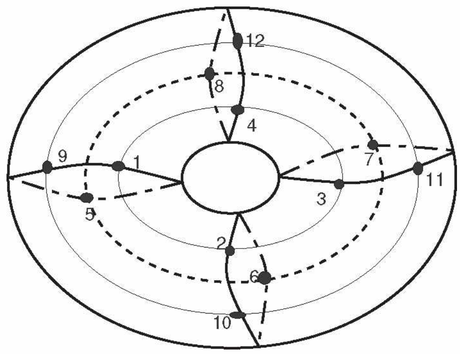
Şekil 3.16. Küre gibi değil (yüzey üzerinde yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğri bulunur)

Tanım 3.7. Euler Karakteristik

M bir yüzey olsun. M yüzeyinin bir üçgenlemesini alalım. Bu üçgenlemede yüz sayısına f, kenar sayısına e, köşe sayısına v dersek, M yüzeyinin Euler karakteristiği v - e + f sayısıdır ve χ ile gösterilir.

Euler karakteristiği her üçgenleme için farklı v, e ve f sayıları verse de v - e + f sayısı her zaman aynı sonucu verir. Aşağıda Örnek 3.1 ve Örnek 3.2'de torusun farklı üçgenlemelerine göre Euler karakteristik sayısını hesaplayacağız:

Örnek 3.1. Torusun Şekil 3.17'de verilen üçgenlemesine göre Euler karakteristiğini hesaplayalım.



Şekil 3.17. Torus yüzeyi ve üçgenlemesi

köşe sayısı = v = 12

kenar sayısı = e = 24

yüz sayısı = f = 12

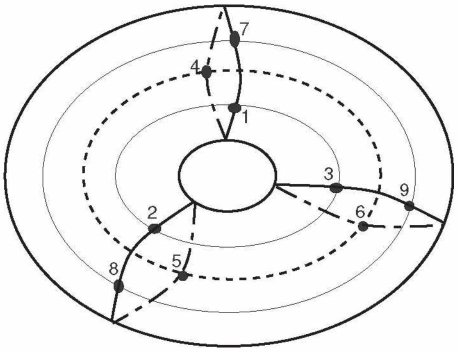
Torusun bu seçilen üçgenlemesine göre, Euler karaktersitiğini hesaplarsak:

χ(Torus)$= v - e + f = 12 - 24 + 12 = 0$

bulunur.

Böylece torusun Euler karakteristiğinin 0 olduğunu buluruz.

Örnek 3.2. Torusun şimdi de Şekil 3.18'de verilen, Örnek 3.1'ten farklı bir üçgenlemeye göre $\chi(Torus) = 0$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.18. Torus yüzeyinin başka bir üçgenlemesi

köşe sayısı = v = 9

kenar sayısı = e = 18

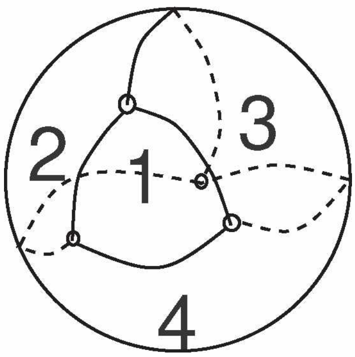
yüz sayısı = f = 9

Torusun bu farkı üçgenlemeye göre Euler karaktersitiği hesaplandığında, yine:

χ(Torus)$= v - e + f = 9 - 18 + 9 = 0$

bulunur.

Örnek 3.3. Bu örnekte ise kürenin Euler karakteristiğini hesaplayalım.



Şekil 3.19. Küre yüzeyinin bir üçgenlemesi

Kürenin Şekil 3.19'de verilen üçgenlemesini kullanırsak:

köşe sayısı = v = 4

kenar sayısı = e = 6

yüz sayısı = f = 4

Buradan kürenin Euler karaktersitiğini hesaplarsak:

χ(Küre)$= v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$

olarak bulunur.

4. BÖLÜM

YARDIMCI TEOREMLERİN İSPATI

Bu bölümde Sınıflandırma Teoremini ispatlamak için ihtiyacımız olacak Önsav 4.6 ve Önsav 4.7'i ispatlayacağız.

Önsav 4.6 ve Önsav 4.7'i ispatlarken kullanacağımız tanımları yapalım:

Tanım 4.1. Çizge

Köşeler ve bu köşeleri birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bağlantılı ağ sitemine **çizge** denir.

Bağlantılı demek köşelerin, kenarların hepsi sadece bir parçada toplanıyor demektir. Bu durumda herhangi iki köşe bağlantılı bir yol (çizgenin kenarları) ile birbirine bağlıdır.

Çizgelerin iki tane durumu vardır.

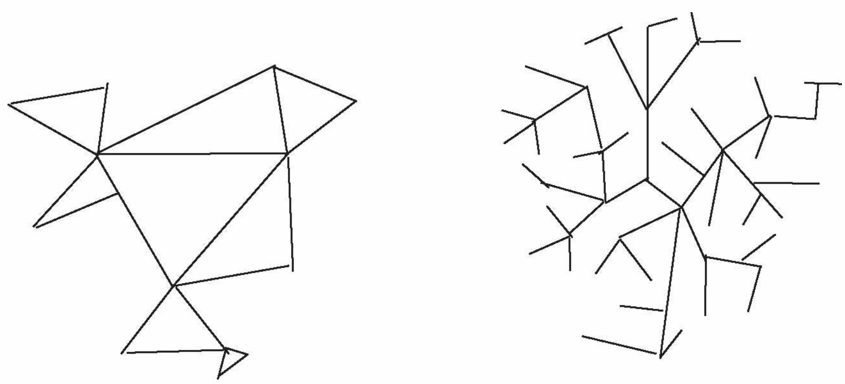
1. Döngü içermesi

2. Döngü içermemesi

Eğer 2. durum gerçekleşiyorsa, yani bir çizge döngü içermiyorsa o çizgeye **ağaç** denir.

Tanım 4.2. Döngü

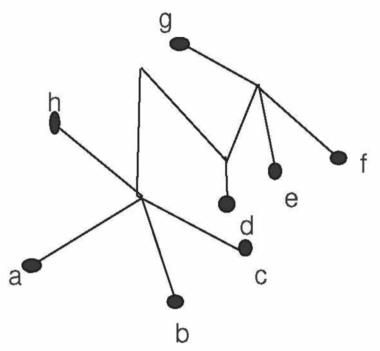
Bir köşeden başlayıp, farklı kenarlar üzerinden yine başlangıç köşesine dönülebiliyorsa, bu kapalı yola **döngü** denir.



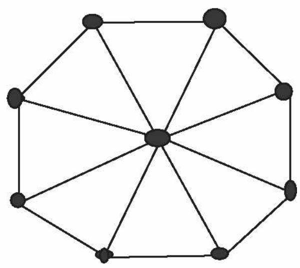
Şekil 4.1. Soldaki çizge döngü içerirken, sağdaki çizge döngü içermez.

Tanım 4.3. Son-Köşe

Bir çizgede kenar ve köşeler bulunmaktadır. Bu köşelerin durumları farklı farklı olabilir. Bir köşeye bağlı birçok kenar olabilir veya tek bir kenar bağlı olabilir.
Eğer bir köşeye bağlı tek bir kenar var ise bu köşeye **son-köşe** denir. Şekil 4.2'da a,b,c,d,e,f,g,h köşeleri son-köşe iken, Şekil 4.3'de hiç son-köşe bulunmamaktadır.



Şekil 4.2. Son-köşe bulunan bir çizge.



Şekil 4.3. Son-köşesi bulunmayan bir çizge.

Önsav 4.1. Her ağaç en azından bir son köşe içerir.

Kanıt. Olmayana ergi yöntemi ile ispatlayalım.
Kabul edelim ki hiç bir ağacın son köşesi olmasın. Son-köşenin tanımından bu demektir ki, ağacın her köşesinden birden fazla kenar geçmektedir. Şimdi ağacın herhangi bir köşesinden başlayarak bir yol takip edelim öyle ki, her geçtiğimiz kenardan bir daha geçmeyecek şekilde bir yol olsun. Köşe sayısından bir fazla kenar sayısının üzerinden geçilince mutlaka bir döngü gerçekleştirilmiş olur. Ancak bu bir ağaç olduğundan döngü içermez, bu bir çelişkidir. Sonuç olarak her ağaç en azından bir son köşe içerir.

□

Önsav 4.2. Eğer T bir ağaç ise o zaman $\chi(T) = 1$ olur.

Kanıt. Tümevarım yöntemini kullanarak ispatı yapacağız. Tümevarımı T ağacındaki kenar sayısı üzerinden yapacağız.

Kabul edelim ki T, kenar sayısı e, köşe sayısı v olan bir ağaç olsun.

Tümevarımın başlangıç adımını gösterelim:

1.Adım: Kabul edelim ki T ağacının kenarı bulunmasın, yani $e = 0$ olsun. Buna göre T ağacının hiç kenarı olmadığından bu ağaç sadece köşelerden oluşmaktadır. T ağacının iki ya da daha fazla köşesi olamaz. Çünkü bunun bir çizge olması için köşelerin birbiri ile bağlantılı olması gerekiyor. O halde tek bir tane köşesi olmalıdır. Bu nedenle $v = 1$ ve $e = 0$ olur ve buradan da $\chi(T) = 1 - 0 = 1$ olduğu bulunur.

2.Adım: Kabul edelim ki $e - 1$ adet kenarı olan ağaçların Euler karakteristiğinin 1 olsun.

3.Adım: Şimdi ise e tane kenarı olan bir T ağacı için $\chi(T) = 1$ olduğunu gösterelim.

T ağacının v tane köşe ve e tane kenarı olsun. Önsav 4.1'ten her ağacın en az bir tane son-köşesi olduğunu söyleriz. O halde, T ağacından bir son-köşe ve buna bağlı kenarı çıkartalım. Bu yeni oluşan ağaca da T' diyelim. Buna göre T' ağacının Euler karakteristiğini hesaplayalım. T' ağacının köşe sayısı $v - 1$ kenar sayısı $e - 1$ olur.

Dolayısıyla;

$\chi(T') = v - 1 - (e - 1) = v - 1 - e + 1 = v - e = \chi(T)$ olur.

T' ağacının kenar sayısının $e - 1$ olduğundan $\chi(T') = 1$ olduğunu söyleriz. Sonuç olarak $\chi(T) = \chi(T') = 1$ bulunur.

□

Önsav 4.3. Eğer G, döngü içeren bir çizge ise o zaman $\chi(G) < 1$ olur.

Kanıt. Kabul edelim ki G, döngü içeren, v adet köşe ve e adet kenar içeren bir çizge olsun. Bu durumda $\chi(G) < 1$ olduğunu gösterelim.

G çizgesinden G'yi bağlantılı bırakacak şekilde bir kenar çıkartalım. Dolayısıyla yeni bir çizge elde etmiş olduk. Buna da G_1 diyelim. G çizgesinin kenar sayısı e iken G_1 çizgesinin kenar sayısı $e - 1$ olur. Ancak köşe sayısında bir değişiklik olmaz. O halde;

$\chi(G) = v - e$ ve

$\chi(G_1) = v - (e - 1) = v - e + 1$ olur.

Buna göre $\chi(G) = \chi(G_1) - 1$ eşitliğini elde ederiz. Yeni elde edilen G_1 çizgesi bir ağaç olabilir veya yine bir döngü içerebilir. Eğer G_1 bir ağaç ise işlemi durdururuz. Eğer ağaç değilse, G_1 çizgesindeki döngülerden birisini daha yok edecek şekilde bir kenar daha çıkartırız ve yeni çizgeye G_2 deriz. Bu işlemi ağaç elde edene kadar devam ettiririz ve en sonunda ağaç elde edince dururuz. Bu işlemi r kere yaparak sonunda G_r ağacını elde ettiğimizi varsayalım. Buna göre, $r \geqslant 1$ olmalıdır. Sonuç olarak:

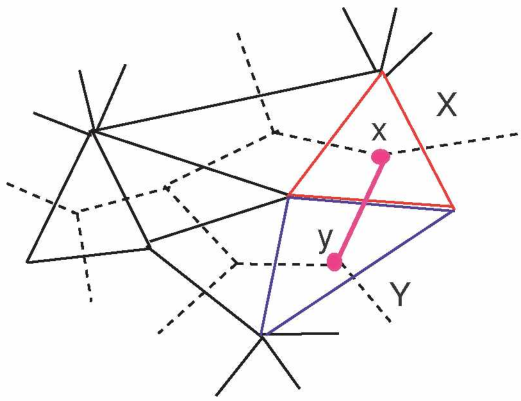
$$\begin{aligned} \chi(G) &= \chi(G_r) - r \\ &= 1 - r, \\ &< 1 \end{aligned}$$

elde ederiz.

□

Tanım 4.4. Dual Üçgenlemeler

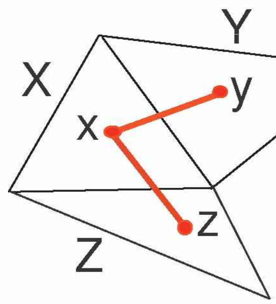
Bağlantılı, kapalı, üçgenlenebilir bir M yüzeyi alalım. M üçgenlenebilir bir yüzey olduğu için bunun bir çok değişik üçgenlemesi vardır. Bu üçgenlemelerden bir tanesini seçelim. Kesik kesik çizgilerle, Şekil 4.4'te gösterilen **dual üçgenlemeyi** aşağıdaki gibi tanımlayalım.



Şekil 4.4. Kesik çizgilerle, dual üçgenleme gösterilmiştir.

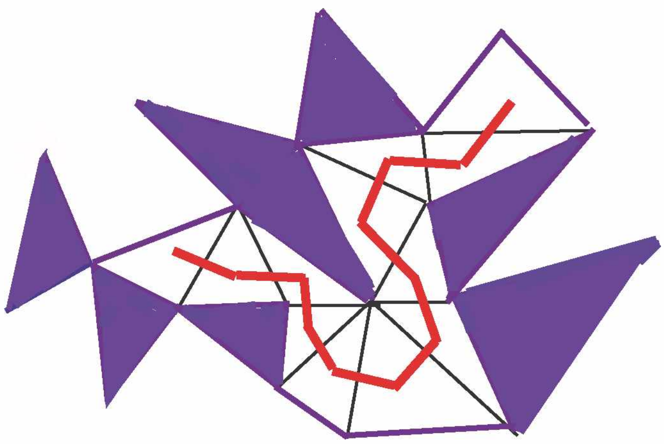
Üçgenlemedeki her X üçgeni için, üçgenin içinde bir x noktası seçelim ve bu köşeye X üçgeninin **dual-köşesi** adını vereceğiz. Eğer X ve Y üçgenlerinin ortak bir kenarı varsa, o zaman onların dual köşeleri olan x ve y noktalarını ortak kenarın üzerinden bir defa geçecek şekilde bir kenar ile birleştirelim.

Dual köşeleri birleştirerek oluşturduğumuz bu kenara da **dual kenar** xy denir. Dikkat edilirse dual kenar, komşu kenarı sadece bir kez keserken, başka bir kenarı kesmez (Bkz: Şekil 4.4 ve Şekil 4.5).



Şekil 4.5. x, y ve z dual köşelerini birleştiren xy ve xz dual kenarları

Eğer bir ağaç dual köşe ve dual kenar içeriyorsa buna **dual ağaç** denir.
Şimdi ise bir dual ağacın **tümleyenini** tanımlayalım. T dual ağacının tümleyeni K; T ile hiç kesişmeyen, M'nin kenar, köşe ve yüzlerinden oluşan kümeye denir.



Şekil 4.6. Dual ağaç ve tümleyeni

Yukarıdaki şekilde bir yüzeyin bir üçgenlemesinden bir kesit verilmiştir. Bu kesit için, kırmızı ile çizilen ağaç, bir dual ağaç iken, mor ile çizilen ise M yüzeyinin tümleyenini ifade etmektedir.

Önsav 4.4. *Dual ağacın tümleyeni bağlantılıdır.*

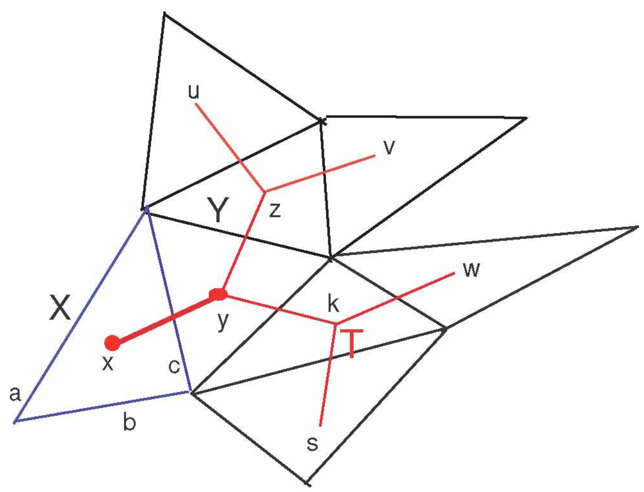
Kanıt. Kabul edelim ki M bir üçgenleme, T dual ağaç ve K da T dual ağacın tümleyeni olsun.Tümleyen K, M üçgenlemenin bütün köşelerini içerir. Dolayısıyla K'nın bağlantılı olduğunu göstermemiz için M üçgenlemesinde herhangi iki köşe aldığımızda bu iki köşenin tümleyen K'daki kenarlarla birleştirileceğini göstermemiz gerekir. İspat için tümevarım yöntemini kullanalım. Dual ağacındaki kenar sayıları üzerinden tümevarım uygulayalım. Dual ağaç T'deki kenar sayısını n ile gösterelim.

1.Adım: Eğer T, kenarı olmayan bir dual ağaç ise, yani $n = 0$ ise T'nin tümleyeninin bağlantılı olduğunu gösterelim.

Eğer dual ağaçta hiç dual kenar yoksa, ağaç sadece dual köşeler içermelidir. O halde, ağaç bir çizge ve çizgeler de bağlantılı olduğundan, bu dual ağaç sadece bir tane dual köşe içermelidir. O zaman K tümleyeni, M'nin bütün kenarlarını içerir. Dolayısıyla M bağlantılı olduğundan, K da bağlantılıdır.

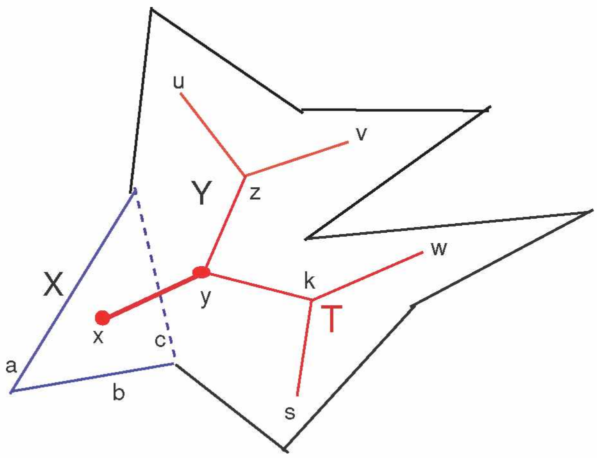
2. Adım: Eğer dual ağacın $n-1$ adet dual kenarı var ise bu ağacın tümleyeninin bağlantılı olduğunu kabul edelim.

3. Adım: Kabul edelim ki T dual ağacının n adet kenarı olsun. Bu durumda T'nin tümleyeni K'nın bağlantılı olduğunu gösterelim.



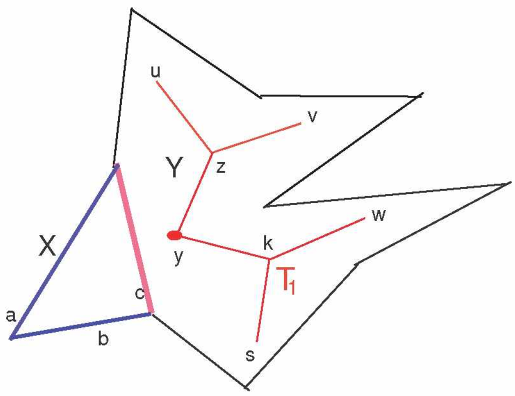
Şekil 4.7. T dual ağaç

Önsav 4.1'den T dual ağacında en azından bir tane son köşe vardır. Bu son köşeye de x diyelim.



Şekil 4.8. T dual ağacı ve tümleyen K

Bu son köşeye bağlı bir dual kenar vardır. Bu kenara da xy diyelim. Şekil 4.8'de gösterildiği gibi x, y dual köşelerinin bulunduğu yüzlere X ve Y, bu iki yüzün ortak kenarına c ve X yüzünün diğer iki kenarına a ve b diyelim.



Şekil 4.9. T_1 dual ağacı ve tümleyen K_1

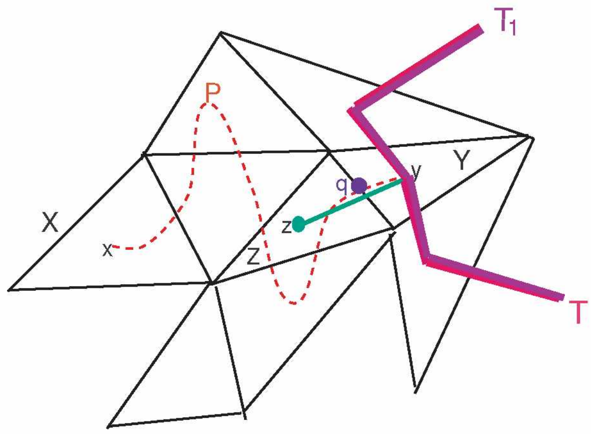
Dual ağacından xy kenarını ve x köşesini silelim. Yeni oluşan dual ağaca T_1 ağacı, tümleyenine de K_1 diyelim. O zaman dual ağacın $n-1$ tane dual kenarı olur. 2. adımdan bir dual ağacın $n-1$ tane dual kenarı varsa bu ağacın tümleyeni bağlantılıdır. O halde T_1'in tümleyeni K_1 bağlantılıdır. Şimdi ise T'nin tümleyeni K'nın bağlantılı olduğunu gösterelim.

K'nın K_1'den farkı, K'da X yüzü ve c kenarı mevcut değildir. K'da c yolu olmasa da c kenarı yerine a ve b kenarı kullanılabilir. Dolayısıyla K_1 bağlantılı olduğundan, K tümleyeni bağlantılıdır.

□

Önsav 4.5. *Maximal dual ağaç bütün dual köşeleri içerir.*

Kanıt. Kabul edelim ki T bir maximal dual ağaç olsun. T'nin maximal bir dual ağaç olması demek, T'yi içeren başka dual ağaç olmaması demektir. Bu ağacın bütün dual köşeleri içerdiğini göstermemiz gerekmektedir.
İspatı olmayana ergi yöntemi ile yapalım.
Kabul edelim ki T, x dual köşesini içermesin. Şekil 4.10'de gösterildiği gibi P, x köşesinden T'nin herhangi bir noktasına bir yol olsun. P yolunun hiç bir köşenin üzerinden geçmemesini sağlayabiliriz.



Şekil 4.10. Maximal dual ağaç, bütün dual köşeleri içerir.

q noktası, P yolunun Y üçgeni ile karşılaştığı ilk nokta olsun. Dolayısıyla q noktası Y üçgeninin kenarı üzerinde olmak zorundadır. Y üçgeninin bu kenarı başka bir üçgenin de kenarıdır. Bu komşu üçgene de Z üçgeni diyelim. Bu Z üçgeninin içinde dual köşe olmak zorundadır. Bu dual köşeye de z diyelim. z dual köşesi T maximal ağacının içinde olmayacaktır. Dolayısıyla T_1 diye başka bir ağaç tanımlayalım. T_1 ağacı bu z dual köşesini ve yz dual kenarını da içersin. O zaman T_1 ağacı T'den daha büyüktür. Dolayısıyla kabulümüz doğru değildir. Yani maximal ağaç bütün dual köşeleri içerir. □

Sınıflandırma Teoremi'nin ispatını yaparken kullanacağımız, Önsav 4.6 ve Önsav 4.7'i ispatlayalım:

Önsav 4.6. M bağlantılı, kapalı, üçgenlenebilir bir yüzey ise, o zaman $\chi(M) \leq 2$.

Kanıt. Kabul edelim ki M bağlantılı, kapalı, üçgenlenebilir bir yüzey olsun, buna göre $\chi(M) \leq 2$ olduğunu ispatlayacağız.
M'nin bir üçgenlemesini seçelim. T maximal dual ağaç ve G, T'nin tümleyeni olsun. O zaman T bütün dual köşeleri içerdiğinden (Önsav 4.5) G'nin hiç yüz içermediğini söyleyebiliriz. Bu nedenle G sadece kenar ve köşelerden oluşur ve bağlantılıdır (Önsav 4.4). O halde G bir çizgedir.
M, G ve T için aşağıdaki üç eşitliği elde ederiz.
1) M yüzeyinin köşe sayısı ile G'nin köşe sayısı aynıdır.
2)M'nin kenar sayısı, T ve G'nin kenar sayıları toplamı ile eşittir.
3) M'nin yüz sayısı ile T'nin köşe sayıları eşittir.
v_M, e_M, f_M sırasıyla M'nin köşe, kenar ve yüz sayılarını,
v_G, e_G, f_G sırasıyla G'nin köşe, kenar ve yüz sayılarını,
v_T, e_T, f_T sırasıyla T'nin köşe, kenar ve yüz sayılarını göstersin.

Öyleyse;

$$\begin{aligned}\chi(M) &= v_M - e_M + f_M \\ &= v_G - (e_T + e_G) + v_G \\ &= v_G - e_G + v_T - e_T \\ &= \chi(G) + \chi(T) \\ &= 1 + \chi(T) \\ &\leq 2,\end{aligned} \tag{1}$$

olur.

□

Önsav 4.7. Eğer M kapalı, bağlantılı, üçgenlenebilir bir yüzey ise aşağıdaki üç durum denktir.

1) M yüzeyi küre gibidir.

2) $\chi(M) = 2$

3) M yüzeyi küreye homeomorfiktir.

Kanıt. Aşağıda verilen önermelerin denk olduğunu göstermeliyiz.

1) M yüzeyi küre gibidir.

2) $\chi(M) = 2$

3) M yüzeyi küreye homeomorfiktir.

İspatı $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ şeklinde olduğunu gösterdiğimizde tamamlamış olacağız. Şimdi $1 \Rightarrow 2$ olduğunu göstermek ile başlayalım. Olmayana Ergi yöntemini kullanacağız. Kabul edelim ki $\chi(M) \neq 2$ olsun ve çelişki bulmaya çalışalım. Kabul edelim ki T bir maximal dual ağaç ve T'nin tümleyenini de G ile ifade edelim.

Bun göre:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(T) + \chi(G) \\ \chi(G) &= \chi(M) - \chi(T) \\ &\neq 2 - 1 \\ &\neq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Bu nedenle G bir ağaç değildir (Önsav 4.2). Bu nedenle G bir döngü içerir. Bu döngüye ise c diyelim. Bu döngü M yüzeyinde basit kapalı bir eğridir ve M yüzeyini iki parçaya ayırır. Çünkü M yüzeyi küre gibidir. Bu parçalardan her biri en az bir tane yüz içerir. Dolayısıyla her biri en az bir tane de dual köşe içermek zorundadır. Dual köşelerden herhangi ikisi T'deki bir yol ile bağlanabilir, çünkü T bir ağaçtır ve ağaçlar bağlantılıdır. Bu yol, T'nin tümleyeni olan G ile kesişmez ve dolayısıyla c ile de kesişmez. Yani M'nin iki parçasındaki noktalar c ile kesişmeyen bir yol ile birleştirilebilir. Bu nedenle c, M yüzeyini ayırmaz. Ancak bu bir çelişkidir. Çünkü yüzey küre gibi olduğundan, bu yüzeyde alınan her basit kapalı eğrinin yüzeyi ayırması gerekirdi. Sonuç olarak M küre gibi ise $\chi(M) = 2$ olur, önermesini göstermiş olduk.

İkinci olarak $2 \Rightarrow 3$ olduğunu, yani $\chi(M) = 2$ olduğunu varsayalım ve M yüzeyinin küreye homeomorfik olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki T maximal dual ağaç ve G de bunun tümleyeni olsun.

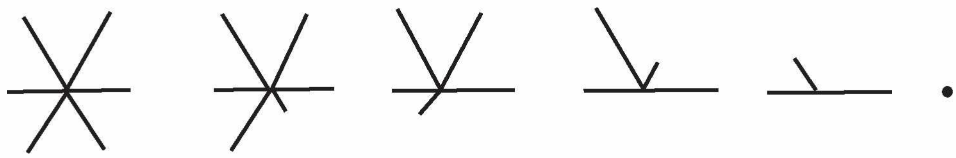
Buna göre:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \chi(T) + \chi(G) \\ \chi(G) &= \chi(M) - \chi(T) \\ &= 2 - 1 \\ &= 1,\end{aligned} \tag{3}$$

elde ederiz.

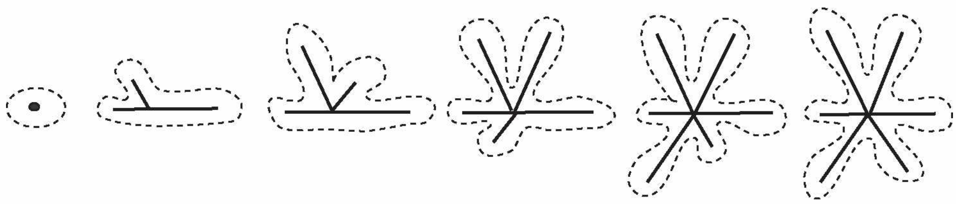
O halde, Önsav 4.2'i kullanarak, G'nin bir ağaç olduğunu söyleriz. Bu G ağacını kalınlaştırarak, bir komşuluğunu alalım ve buna $N(G)$ diyelim. $N(G)$'nin diske homeomorfik olduğunu göstereceğiz.

Her ağacın bir son köşesi vardır. Ağacın bir son köşesinden başlayarak yavaş yavaş tek bir nokta kalana kadar ağacı büzelim (Bkz: Şekil 4.11).



Şekil 4.11. Ağaç noktaya büzülüyor.

Noktanın komşuluğunu aldığımızda, diske homeomorfiktir. Bu noktanın komşuluğu olan diskten, Şekil 4.12'deki gibi, ağacın geri kalan kenarlarını teker teker kalınlaştırarak, diske eklersek, tekrar ağacı elde ettiğimizde, bunun kalınlaştırılmış halinin yine diske homeomorfik bir yüzey olduğunu görürüz.

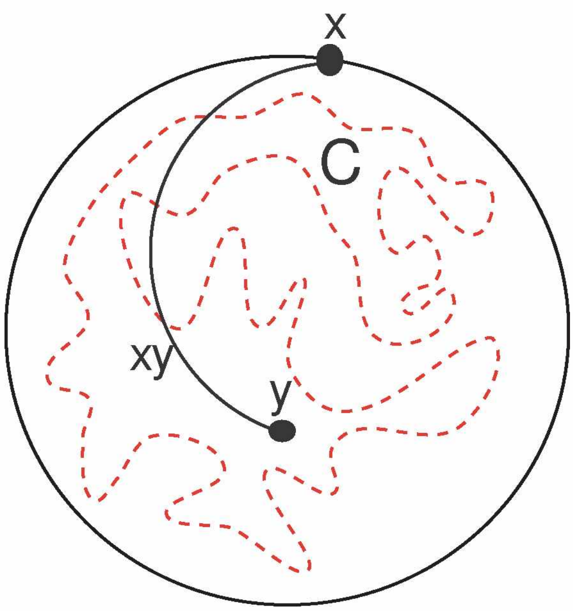


Şekil 4.12. Noktadan başlayarak ağacın komşuluğunu alıyoruz.

Sonuç olarak $N(G)$ diske homeomorfik olur. Benzer şekilde T de bir ağaç olduğu için bunun kalınlaştırılmışı olan $N(T)$ de diske homeomorfiktir. Buradan N ve G'nin komşulukları olan diskleri, sınırları boyunca birbirine yapıştırarark M yüzeyini, yani küreyi elde ederiz. Dolayısıyla M yüzeyi küreye homeomorfiktir.

Son olarak $3 \Rightarrow 1$, yani M küreye homeomorfik ise küre gibidir olduğunu ispatlayacağız.

Göstermeye çalıştığımız; küre üzerinde aldığımız herhangi bir basit kapalı eğri C'nin yüzeyi ayırdığıdır. Burada Jordan Curve Teoremi'nin polygon formundan faydalanacağız. Kabul edelim ki, C'nin sonlu sayıda büyük, çembersel yaylardan oluşan bir polygon olsun (Bkz: Şekil 4.13) .



Şekil 4.13. Küre üzerinde alınan C basit kapalı eğrisi yüzeyi ikiye ayırır.

Küre üzerinde, C'den geçmeyen bir x noktası seçelim. Genelliği bozmadan, x noktasını kuzey kutbu olarak kabul edelim. Kürenin üzerinde, x'ten farklı, yine C'nin üzerinden geçmeyen bir y noktası alalım. x noktasından y noktasına C'nin kenarlarını keserek çizdiğimiz eğriye ise xy diyelim (Bkz: Şekil 4.13.) C'nin xy ile kesişme sayısı ya tek ya da çift olmalıdır. Eğer tek sayıda ise y noktası C kapalı eğrisinin içinde, çift ise dışındadır. Dolayısıyla C basit kapalı eğrisi yüzeyi, kesişim sayısı tek olanlar ve kesişim sayısı çift olanlar diye iki bölgeye ayırır. O halde yüzeyimiz küre gibidir.

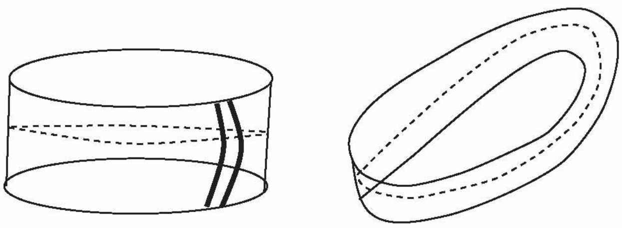
$\square$

5. BÖLÜM

SINIFLANDIRMA TEOREMİNİN İSPATI

Teorem 5.1. *M kapalı, bağlantılı bir yüzey olsun. M yüzeyi standart olan yüzeylerden birisine homeomorfiktir.*

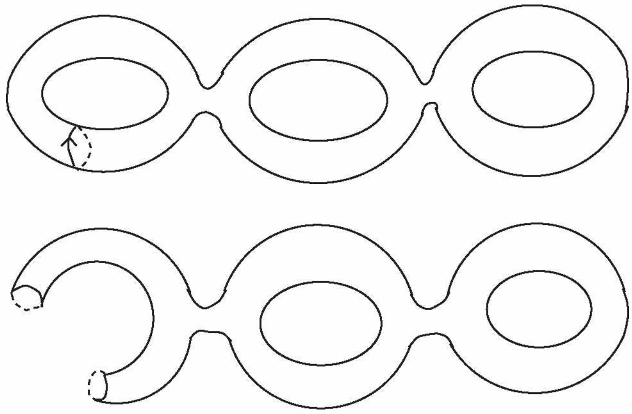
Kanıt. M yüzeyinin bir üçgenlemesini alalım. Bu üçgenlemeye göre M yüzeyinin Euler karakteristiğini hesaplayalım.
M bağlantılı, kapalı bir yüzey olduğu için $\chi(M) \leq 2$'dir (Önsav 4.6).
Eğer $\chi(M) = 2$ ise M yüzeyi küreye homeomorfiktir (Önsav 4.7).
Eğer $\chi(M) < 2$ ise bu durumda M yüzeyi küre gibi değildir (Önsav 4.7).
O halde, küre gibinin tanımı gereği M yüzeyinde yüzeyi ayırmayan bir C eğrisi bulabiliriz. M yüzeyinde C'nin kalınlaştırılmışını ele alalım. C'nin kalın şeridi bir silindir veya Möbius şeridi olabilir (Bkz: Şekil 5.1).



Şekil 5.1. C eğrisinin komşulukları

C'nin kalınlaştırılmışı eğer silindir ise C eğrisine **yön koruyan eğri**, Möbius şeridi ise C eğrisine **yön korumayan eğri** denilmektedir.
Şimdi her iki durum (C eğrisi yön koruyan ve yön koruyan olmama) için "ameliyat" işlemini yapacağız:

Eğer C, yön koruyan bir eğri ise o zaman bilindiği gibi C'nin kalınlaştırılmış hali bir silindir olacaktır. Eğer C eğrisi boyunca yüzeyi kesersek bağlantılı başka bir yüzey elde ederiz. Çünkü C, yüzeyi ayırmayan bir eğridir. M yüzeyini C eğrisi boyunca keselim, oluşan iki sınırı disk ile kapatalım. Ancak disklerin sınırlarına yönlerini gösteren okları koymayı unutmayalım ki bu oklar sayesinde, tekrar nereden dikmemiz gerektiğini hatırlamak için.



Şekil 5.2. Yön koruyan C eğrisi boyunca yüzeyi kesersek

Eğer C, yön korumayan bir eğri ise o zaman C'nin kalınlaştırılmış hali bir Möbius şeridi olacaktır. Eğer C eğrisi boyunca yüzeyi kesersek bağlantılı ve bir sınırı olan başka bir yüzey elde ederiz.

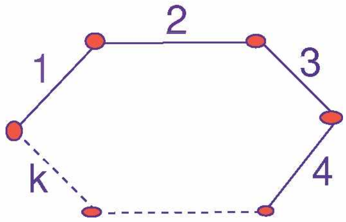
M yüzeyini C eğrisi boyunca keselim, oluşan tek sınırı disk ile kapatalım. Her iki durumda da bu şekilde elde edilen yüzeyi M_1 yüzeyi olarak adlandıralım.

M_1 yüzeyinin Euler karakteristiğini hesaplarsak:

$$\chi(M_1) = \begin{cases} \chi(M) + 2, & C \text{ yön koruyan ise} \\ \chi(M) + 1, & C \text{ yön korumayan ise} \end{cases}$$

olur.

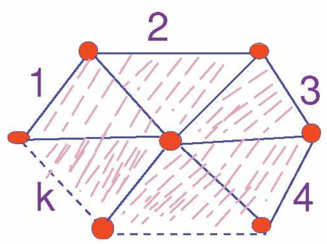
Yukarıdaki eşitliği gösterelim. İlk olarak C'nin yön koruyan bir eğri olma durumuna bakalım. Yüzeyi C eğrisi boyunca kesince C eğrisini yüzeyden çıkartalım. C kapalı bir eğri olduğu için k tane köşesi varsa k tane de kenarı vardır.



Şekil 5.3. C eğrisinin bir üçgenlemesi

C eğrisinin Euler karakteristiğini hesaplarsak $\chi(C) = k - k = 0$ olur. Dolayısıyla bu C eğrisini yüzeyden çıkartmak Euler karakteristiğini değiştirmez.

C eğrisini çıkardıktan sonra iki tane sınır bileşeni elde ederiz ve bunları da ameliyatla disk ile doldurmuştuk. Bu diskin Euler karakteristiğini hesaplarsak; sınırda k tane köşe vardı, ortaya da bir köşe koyarsak $k+1$ tane köşe olur. Bu durumda $2k$ tane kenar ve k tane de yüzey oluşur.



Şekil 5.4. Disk yapıştırılan C eğrisinin bir üçgenlemesi

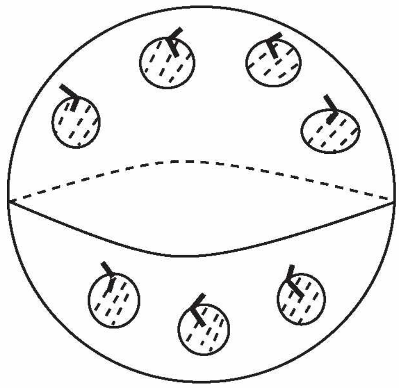
Diskin Euler karakteristiği $\chi(Disk) = (k+1) - 2k + k = 1$ olur. C eğrisinin yön koruyan olma durumunda, iki adet disk doldurduğumuz için ameliyat ile Euler karakteristiği de 2 artmış oldu.

İkinci durum olan C eğrisinin yön korumayan durumu için eşitliği gösterelim.

Bu durumda C eğrisi boyunca M yüzeyini kesince içi boş bir tane sınır bileşeni elde ediliyordu. Ameliyat ile sadece bu sınırın içini disk ile doldurduğumuz için yeni oluşan yüzeyin Euler karakteristiği 1 artmış olur.

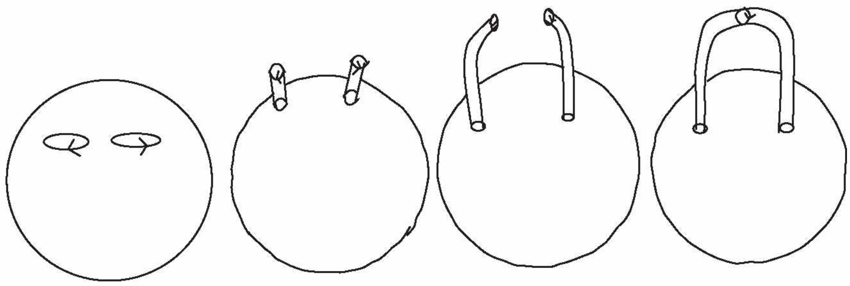
Eğer $\chi(M_1) = 2$ ise M_1 küreye homeomorfiktir. Eğer $\chi(M_1) < 2$ ise küreye homeomorfik olana kadar ameliyat işlemine devam ederiz ve küreye homeomorfik bir yüzey edince işlemi durdururuz.

Sonuçta küreye homeomorfik M_n yüzeyi elde edildi, öyle ki bu yüzey üzerinde ameliyat izleri vardır (Bkz: Şekil 5.5). Bu ameliyat sonrası küre üzerinde oluşan izlere "yamalı diskler" diyelim. Sırada, bu küreye "geri ameliyat" işlemi yapmaktır. Üç tip geri ameliyat vardır:



Şekil 5.5. Ameliyatlar sonrası elde edilen küre

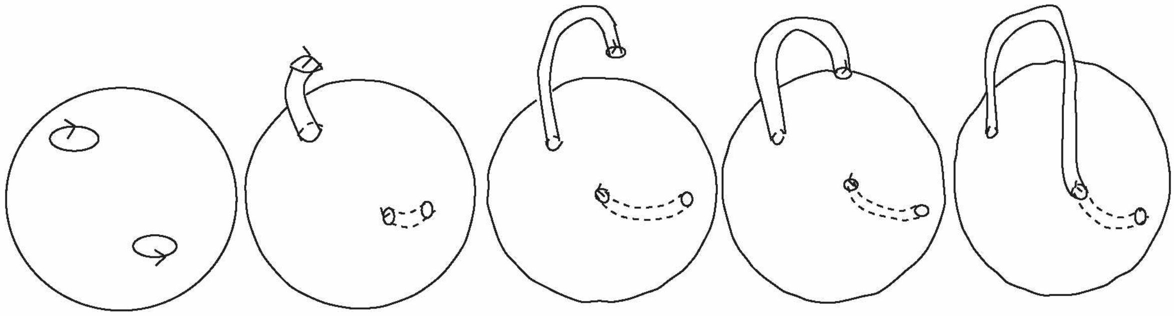
Tip 1. Kürenin üzerinde, yamalı disklerden iki adet alalım, eğer disk çiftinin okları farklı yönde gidiyorsa, bu disk çiftlerini çıkartıp daha sonra disklerin sınırlarını uzatarak tüpler çıkartıp, bu tüpleri yapıştıralım. Böylelikle küreye bir kulp eklemiş oluruz (Bkz: Şekil 5.6).



Şekil 5.6. Tip 1 Geri Ameliyat

Tip 2. Eğer bir tane disk varsa bu diski çıkartalım ve bunun sınırındaki karşı kutup noktalarını birbiri üzerine yapıştırıyoruz. Diğer bir deyişle, yüzeye Möbiüs şeridi dikmiş oluruz.

Tip 3. Eğer disk çiftinin okları aynı yöne gidiyorsa, diskleri çıkartalım. Daha sonra çıkartılan bir diskin sınırını yüzeyin içine doğru, diğer diskin sınırını ise yüzeyin dışına doğru itelim. İçine doğru uzatılan tüpü, yüzeyden çıkartarak düğer tüp ile yapıştıralım (Bkz: Şekil 5.7). Böylelikle Klein şişesi dikmiş, yani iki Möbiüs şeridi dikmiş oluruz.



Şekil 5.7. Tip 3 Geri Ameliyat

Tüm geri ameliyat işlemlerini yaparak M yüzeyine homeomorfik olan M^* yüzeyi elde edilmiş olur. M^* yüzeyi için iki durum söz konusudur, yönlendirilebilir veya yönlendirilemeyen olabilir, bu iki durumu da ayrı ayrı inceleyelim:

Yönlendirilebilir Durum:

M yönlendirilebilir ise M^* da yönlendirilebilir olmalıdır. Dolayısıyla M^* Möbiüs şeridi içermez. Bu durumda sadece Tip 1. geri ameliyat(ları) yapılmış olmalıdır M^* yüzeyini elde ederken. O halde, M^* yüzeyi, küreye n tane kulp dikilerek elde edilmiştir.
Bu n sayısı yapılan ameliyat (veya geri ameliyatların) sayısıdır.

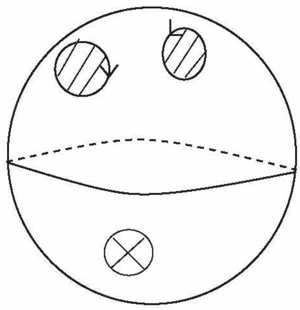
$$M \to M_1 \to M_2 \to ... \to M_n = S^2$$

Her bir ameliyatta seferinde Euler karakteristiği 2 arttığı için ;
$\chi(M) + 2n = \chi(S^2)$ olur.
İfadeyi düzenlersek cins sayısı;
$n = 1 - \frac{\chi(M)}{2}$ olur.
Böylelikle M, standart yönlendirilebilir cins n yüzeyidir.

Yönlendirilemeyen Durum

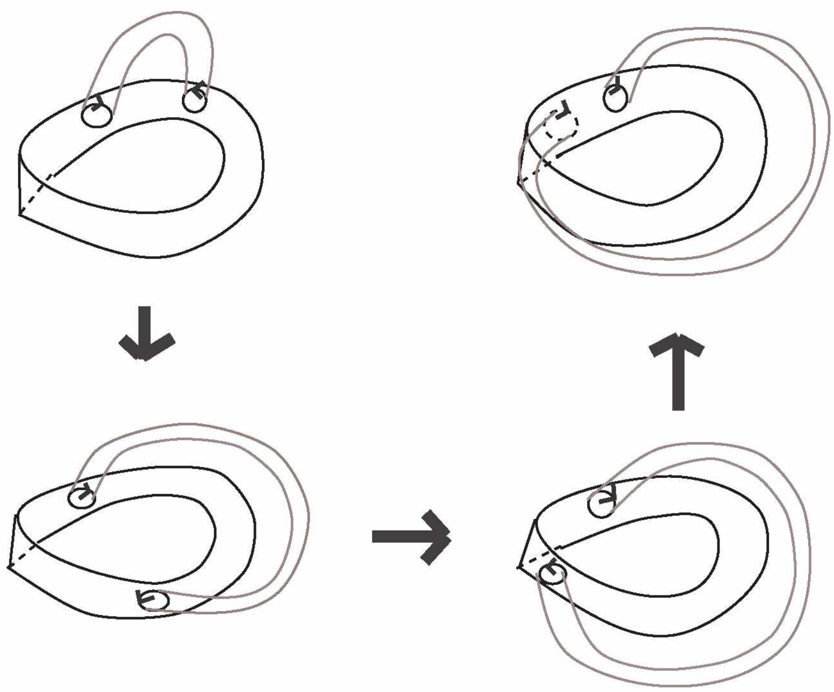
Eğer M yönlendirilemeyen ise M^* yüzeyi de yönlendirilemeyen yüzeydir. O halde geri ameliyattaki üç durum da gerçekleşebilir. Ancak yanlızca Tip 1 geri ameliyat gerçekleşmiş olmaz, çünkü o zaman yüzey yönlendirilebilir olurdu. Bu da bir çelişki oluştururdu.

Dolayısıyla en azından tip 2 veya tip 3'den bir tane olmak zorundadır. Sonuç olarak M^* yüzeyinde en azından bir adet Möbius şeridi dikilmiş olmalıdır, geri ameliyatlarla. Bu durumda, Möbius şeridinin varlığında, Tip 1 geri ameliyatı, Tip 3 geri ameliyata dönüştürebiliriz:



Şekil 5.8. Küre üzerindeki delikler

Tip 1'de diktiğimiz kulbun (silindirin) bir ucunu sabit bırakıp, diğer tarafını Möbiüs şeridi boyunca yürütelim (Bkz: Şekil 5.9).



Şekil 5.9. Möbius Şeridi ve Torus, Möbius Şeridi ve Klein Şişesine denktir.

Şekil 5.9'da görüldüğü gibi Möbius Şeridinin varlığında tüm Tip 1 Geri Ameliyatları Tip 3'e dönüştürülmüş olur. Dolayısıyla;

Torus + Möbiüs Şeridi = Klein Şişesi + Möbiüs Şeridi olur.

Böylelikle M^* yüzeyini elde etmek için, sadece tip 2 ve tip 3 geri ameliyatları uygulamış olduk. Bu durumda, M^* yüzeyi küreye n tane Möbiüs şeridi dikilmiş yüzey olmuş olur. Şimdi bu n sayısını bulalım.

$M \to M_1 \to M_2 \to ... \to M_n = S^2$

Her seferinde Euler karakteristik 1 arttığı için;

$\chi(M) + n = \chi(S^2)$ olur.

İfadeyi düzenlersek cins sayısı;

$n = 2 - \chi(M)$ olur.

O zaman M^* standart yönlendirilemeyen n cinsli yüzey olur.

Böylelikle, her iki durum için (yönlendirilen veya yönlendirilemeyen) de M yüzeyinin standart yüzeylerden birisine homeomorfik olduğunu göstermiş oluruz.

$\square$

KAYNAKLAR

Brahana, H. R. (1921). Systems of circuits on two-dimensional manifolds. Annals of Mathematics, 144-168.

Dehn, M., Heegaard, P. AB. 3 Analysis Situs. Encyklopädie Der Mathematischen Wissenschaften Mit Einschluss Ihrer Anwendungen, 153-220.

Dyck, W. (1888). Beiträge zur Analysis situs. Mathematische Annalen, 32(4), 457-512.

Gallier, Jean H., Dianna Xu. A guide to the classification theorem for compact surfaces. Berlin: Springer, 2013.

Jordan, C. (1866). Sur la déformation des surfaces. Journal de mathématiques pures et appliquées, 105-109.

Möbius, A. F. (1886). Zur theorie der polyëder und der elementarverwandtschaft. Gesammelte werke, 2, 519-559.

Ozan, Y.. Türevlenebilir Manifoldlara Giriş. ODTÜ Yayınları, 2016.

Radó, T. (1925). Über den begriff der riemannschen fläche. Acta Litt. Sci. Szeged, 2(101-121), 10.

Zeeman, E. C. (1966). An introduction to topology: The classification theorem for surfaces. Mathematics Institute, University of Warwick.