

**T.C.  
HİTİT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GÖNDERİM SINIF GRUPLARI  
VE ÜRETEÇLERİ**

**Esra KIVANÇ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
Doç. Dr. Elif DALYAN**

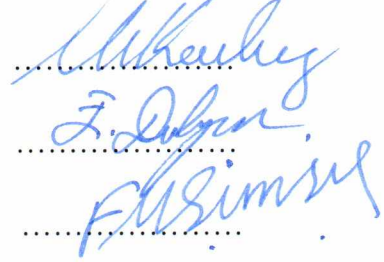
**TEMMUZ 2018  
ÇORUM**

Esra KIVANÇ tarafından hazırlanan “Gönderim Sınıf Grupları ve Üreteçleri” adlı tez çalışması 13.07.2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Hitit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

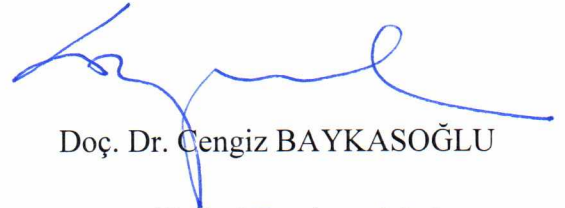
Prof. Dr. Mustafa KORKMAZ

Doç. Dr. Elif DALYAN

Doç. Fatma Muazzez ŞİMŞİR



Hitit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 24.10.2018 tarih ve 2018/223 sayılı kararı ile Esra KIVANÇ Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.



Doç. Dr. Cengiz BAYKASOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## TEZ BEYANI

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Esra KIVANÇ



## GÖNDERİM SINIF GRUPLARI ve ÜRETEÇLERİ

Esra KIVANÇ

HİTİT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2018

### ÖZET

Bu çalışmada yüzey, yüzey homeomorfizmaları ve yüzey homeomorfizmalarının izotopi sınıfları incelenmiştir. Bu izotopi sınıfları, gönderim sınıf grubu adı altında bir grup oluşturmaktadır. Tez çalışmamızın asıl amacı gönderim sınıf grubunun üreteçleri üzerine yoğunlaşmaktır. Gönderim sınıf gruplarının en temel üreteçleri olan Dehn burguları incelenmiştir. Dehn burguları sonsuz mertebeye sahip olmakla beraber yüzeylerin gönderim sınıf gruplarını üretmekte önemli rol oynamaktadırlar. Dehn burgularından farklı üreteç kümeleri araştırılmıştır. Böylelikle yüzeylerin gönderim sınıf gruplarını üreten üreteçler içine mertebesi sonlu olan elemanlar da eklenmiştir. Daha sonra bu sonlu mertebeye sahip üreteçlerin mertebelerini ne kadar küçültebiliriz sorusu araştırılmıştır. Bunun üzerine mertebeleri iki olan üreteçler, yani involusyonlar, tarafından oluşan üreteç kümeleri irdelenmiştir. Kaç adet involusyonun gönderim sınıf gruplarını üreteceği sorusu sorgulanmış, bunun üzerine yapılan en son çalışmalar incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Yüzey homeomorfizmaları, izotopi sınıfı, gönderim sınıf grubu, Dehn burguları, gönderim sınıf grubunun üreteçleri, involusyon

## MAPPING CLASS GROUPS and GENERATORS

Esra KIVANÇ

HITIT UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2018

### ABSTRACT

In this study, surface, surface homeomorphisms and isotopy classes of surface homeomorphisms are examined. These isotopy classes constitute a group under the name of the “mapping class group”. The main purpose of this thesis is to focus on the generators of the mapping class group. Dehn twists, the most basic generators of the mapping class group, are examined. Dehn twists play an important role in generating the mapping class group of the surfaces. Different generator sets from Dehn twists are also investigated. On this purpose, the torsion (finite order) elements are added to the generating sets of the mapping class group of the surfaces. Then finding the minimum order generators are studied. On this, the generator set consisting of order two generators, namely involutions, are examined. “How many involutions can generate the mapping class group” is considered and the most recent studies to this problem are investigated.

**Keywords:** Surface homeomorphisms, isotopy class, the mapping class group, Dehn twists, the generators of the mapping class group, involutions

## TEŞEKKÜR

Bu konuyu yüksek lisans tezi olarak öneren, tez aşamasındaki bütün çalışmalarım boyunca üstün bilgi ve tecrübeleriyle bana yön veren değerli danışman hocam Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Elif DALYAN'a teşekkür ederim.

Hayatımda desteğini esirgemeyen eşim Harun KIVANÇ'a sonsuz teşekkür ederim.

Bütün eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman yanımda olan, beni bugünlere getiren anneme ve babama teşekkür ederim.

Esra KIVANÇ

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. YÜZEYLER.....	2
3. HOMEOMORFİZMALAR.....	6
3.1. Yüzey Homeomorfizma Örnekleri.....	6
4. YÜZEYLERİN İZOTOPİ SINIFI.....	9
5. GÖNDERİM SINIF GRUBU TANIM VE ÖRNEKLER.....	12
5.1. Örnekler.....	12
6. GÖNDERİM SINIF GRUPLARININ ÜRETEÇLERİ.....	16
6.1. Dehn Burgusu.....	16
6.2. Dehn Burgularının Bazı İlişkiler.....	17
7. DEHN-LICKORISH TEOREMİ.....	27
8. DİĞER ÜRETEÇLER.....	39
8.1. Lickorish Üreteçleri.....	39
8.2. Humphries Üreteçleri.....	39
9. MİNİMUM ÜRETEÇ SAYISI.....	42
10. SONLU MERTEBEYE SAHİP ÜRETEÇLER.....	46



	8
11. İNVLUSYON ÜRETEÇLERİ.....	59
12. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	57
13. KAYNAKLAR .....	60
14. ÖZGEÇMİŞ.....	61



## ŞEKİLLER

### Şekil

### Say

Şekil 2. 1. Küre.....	2
Şekil 2.2. Tor yüzeyi.....	3
Şekil 2.3. $S_{g,b}^p$ yüzeyi.....	3
Şekil 2.4. Möbius şeridi.....	4
Şekil 2.5. Cins 2 ile tor yüzeyinin bağlantılı toplamı.....	5
Şekil 3.1. $f$ homeomorfizmasının cins 5 yüzeyine uygulanması.....	7
Şekil 3.2. Cins 1 yüzeyine $i$ dönüşümünün uygulanması.....	7
Şekil 3.3. Cins 3 yüzeyinde yansıma dönüşümü.....	8
Şekil 4.1. Basit kapalı eğriler.....	9
Şekil 4.2. $a, c, d$ yüzeyi ayırmayan eğriler ve $b$ yüzeyi ayıran eğri.....	10
Şekil 4.3. Eğrilerin birbirine göre izotopisi.....	10
Şekil 5.1. Disk üzerindeki homeomorfizmanın zamanla birim elemana izotopisi. ...	13
Şekil 5.2. A halkası.....	14
Şekil 6.1. $\alpha$ eğrisi boyunca Dehn burgusu birinci adım.....	16
Şekil 6.2. $\alpha$ eğrisi boyunca Dehn burgusu ikinci adım.....	16
Şekil 6.3. $\alpha$ eğrisi boyunca Dehn burgusu üçüncü adım.....	17
Şekil 6.4. $\alpha$ eğrisi boyunca Dehn burgusu dördüncü adım.....	17
Şekil 6.5. $T_c T_d(c) = d$ eşitliğinin ispatı.....	19

	10
Şekil 6.6. Dört delikli küre.....	20
Şekil 6.7. a,b ve c yayları.....	21
Şekil 6.8. a,b,c yaylarına $f^{-1}g$ dönüşümünün uygulanışı.....	21
Şekil 6.9. Çift sayıda eğri zincirinin komşuluğu.....	22
Şekil 6.10. Tek sayıda eğri zincirinin komşuluğu.....	22
Şekil 6.11. $c_i$ eğrilerine h homeomorfizmasının uygulanması.....	23
Şekil 6.12. $h^{4g+2}D^{-1}(e)=(e)$ .....	23
Şekil 6.13. $c_i$ eğrilerine h homeomorfizmasının uygulanması.....	24
Şekil 6.14. $h^{4g+2}D^{-1}d^{-2}(e)=(e)$ .....	24
Şekil 6.15. Bir sınırlı tor yüzeyi.....	25
Şekil 6.16. İki sınırlı tor yüzeyi.....	26
Şekil 7.1. $n \geq 2$ için S yüzeyi.....	28
Şekil 7.2. S yüzeyinin sınır bileşenleri.....	28
Şekil 7.3. $m=2$ için Durum 1) i).....	29
Şekil 7.4. $m=2$ için Durum 1) ii).....	29
Şekil 7.5. $m=2$ için Durum 2) i).....	30
Şekil 7.6. $m=2$ için Durum 2) ii).....	30
Şekil 7.7. $m \geq 3$ olma durumu.....	31
Şekil 7.8. $m \geq 3$ için Durum 1) i).....	31
Şekil 7.9. $m \geq 3$ için Durum 1) ii).....	32
Şekil 7.10. $m \geq 3$ için Durum 2) i).....	33

	11
Şekil 7.11. $m \geq 3$ için Durum 2) ii).....	34
Şekil 7.12. a,c,b eğri zinciri.....	34
Şekil 7.13. $a_i, c_i, b_i$ eğri zincirleri.....	35
Şekil 7.14. $m \geq 2$ için için i).....	35
Şekil 7.15. $m \geq 2$ için için ii).....	36
Şekil 7.16. Torus.....	37
Şekil 7.17. Bir sınırlı torus.....	37
Şekil 7.18. Durum 1.....	38
Şekil 7.19. Durum 2.....	38
Şekil 8.1. Lickorish üreteçleri.....	39
Şekil 8.2. Humphries üreteçleri.....	39
Şekil 8.3. $h$ homeomorfizması.....	40
Şekil 9.1. Humphries eğrileri.....	42
Şekil 9.2. $g$ cinsli yüzeyin dairesel modeli.....	42
Şekil 9.3. $c_i$ ve $d_j$ eğrileri.....	44
Şekil 10.1. $g$ cinsli yüzey.....	47
Şekil 11.1. $s$ involusyonu.....	49
Şekil 11.2. Lantern ilişkisi.....	50
Şekil 11.3. İnvolyon $i$ .....	50
Şekil 11.4. Dört delikli küre.....	52
Şekil 11.5. $J_1$ involusyonu.....	53

Şekil 11.6. $R$ homeomorfizması.....	54
Şekil 11.7. $\rho_1$ ve $\rho_2$ involusyonları.....	55
Şekil 11.8. $x_1$ eğrisi.....	55



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$S^2$	küre
$T^2$	torus
$D^2$	disk
$\#$	bağlantılı toplam
$S_{g,b}^p$	delik sayısı g, sınır sayısı b ve nokta sayısı p olan yüzey
$f \vee \partial S$	f'in sınırına kısıtlanması
$\approx$	izotopik
$[h]$	h'a izotopik olan homeomorfizmaların kümesi
$Mod(S)$	S yüzeyinin gönderim sınıf grubu
$\cong$	izomorfik
$T_a$	a eğrisi etrafında sağ (pozitif) Dehn burgusu
$T_a^{-1}$	a eğrisi etrafındaki sol (negatif) Dehn burgusu
$i(a \cap b)$	a ve b eğrilerinin geometrik kesişim sayısı

## 1. GİRİŞ

Bu araştırmanın temel amacı bir  $S$  yüzeyinin simetrilerinin grubu olan gönderim sınıf gruplarını tanıtmak, daha sonrasında grubun üreteç kümelerini incelemek ve bunlar üzerine yapılan en son çalışmaları irdelemektir. İlk olarak Bölüm 2’de yüzeylerin ve yönlendirilebilen yüzeylerin tanıtımı yapılarak bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Teorem 2.1’de yönlendirilebilen yüzeylerin topolojik olarak denk olması, sınıflandırılmalarından bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde homeomorfizmaların tanımı verilerek, yüzeylerin topolojik olarak denkliğinden bahsedildi. Yönlendirilebilen ve yönlendirilemeyen yüzey homeomorfizmaları incelendi. Dördüncü bölümde yüzey homeomorfizmalarının denklik sınıflarını oluşturmaya yarayan izotopin tanımı yapıldı. Beşinci bölümde yüzeylerin gönderim sınıf grupları tanımı yapılarak bu grubun özelliklerinden bahsedildi. Birçok yüzeyin gönderim sınıf gruplarını bulmamızda yardımcı olacak Alexander Önsav’ı ve ispatı yapıldı. Sonra Alexander Önsav’ı kullanılarak birkaç yüzeyin gönderim sınıf grubu hesaplandı. Daha fazla bilgi almak için Farb ve Margalit’in "A Primer on Mapping Class Groups" (Farb ve Margalit, 2012) isimli kitabından yararlanılabilir. Altıncı bölümde gönderim sınıf gruplarının üreteçleri olan Dehn burguları tanıtılarak bu burguların bazı ilişkilerinden bahsedildi. Sonrasında gönderim sınıf grubunun bir çok farklı özelliğinin ispatında kullandığımız lantern ve zincir ilişkilerinin ispatı yapıldı. Yedinci bölümde gönderim sınıf gruplarının üreteçleri üzerine yapılan çalışmalar incelenerek Dehn-Lickorish-Humphries üreteçleri incelendi. Daha sonra gönderim sınıf gruplarının Dehn burgularından farklı elemanlar kullanarak üretilebildiği gösterildi. Sekizinci bölümde  $g$  cinsli, yönlendirilebilir, kapalı bir yüzeyin gönderim sınıf grubunun sonlu mertebeye sahip  $(4g + 2)$  iki eleman tarafından üretildiğinin ispatı yapıldı (Korkmaz, 2005). Son bölümde gönderim sınıf gruplarının involusyonlardan (kıvrılma) oluşan üreteç kümesinden bahsedilip yüzeylerin gönderim sınıf gruplarının kaç adet involusyon tarafından üretilebileceği sorusu üzerinde yoğunlaştık.

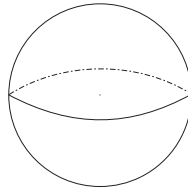
## 2. YÜZEYLER

Yüzey kelimesi, Türk Dil Kurumu Sözlüğüne göre, bir cisimî uzaydan ayıran dış ve yaygın bölüm, yüz manasına gelmektedir. Denizin yüzeyi, masa yüzeyi gibi kullanıldığında da yüzeyin doğada ve çevremizde iki boyutlu bir yapıya sahip olduğunu algularız. Matematikte de yüzeyi benzer şekilde düşünürüz. Ancak yüzeyi matematiksel olarak tanımlamadan önce, bir tanıma daha ihtiyacımız olacak.

**Tanım 2.1. Manifold:**  $X$  Hausdorff (herhangi iki noktası ayrık komşuluklara sahip) ve ikinci sayılabilir (sayılabilir bir tabana sahip olan) bir uzay olsun. Bu uzayın verilen herhangi bir  $p$  noktasının komşuluğu  $n$  boyutlu Öklid uzayına taşınabiliyor ise  $X$ 'e  $n$ -boyutlu **topolojik manifold (çokkatlı)** denir.

**Tanım 2.2. Yüzey:** Yüzey iki boyutlu bir çokkatlıdır. Yani bu yüzeyde aldığımız herhangi bir  $p$  noktasının çevresinde bir komşuluk bulabiliriz ki bu komşuluk  $R^2$ 'ye taşınabilir. Bu demektir ki verilen bu  $p$  noktasının çevresine bir koordinat sistemi döşenebilir. Böylece yüzey, bir düzlem parçası olmasa bile  $p$  noktası çevresindeki noktalar bir düzlemdeymiş gibi koordinatlara sahip olur. Bir topun dış yüzü, bir simitin dış yüzü yüzeye birer örnektir.

**Örnek 2.1. Küre:** Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların meydana getirdiği kümeye 'küre' denir ve  $S^2$  ile gösterilir (Şekil 2.1). Buradaki sabit noktaya kürenin merkezi, merkezden eşit uzaklıktaki noktara olan mesafeye kürenin yarıçapı denir.

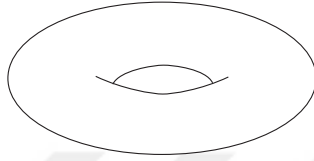


**Şekil 2.1.** Küre

**Örnek 2.2. Tor Yüzeyi:** Tor yüzeyini üç boyutlu bir uzaydaki bir simitin dış yüzü olarak düşünebiliriz. Tor yüzeyine, küre gibi, kalkülüs dersinden aşına olabiliriz. Bir



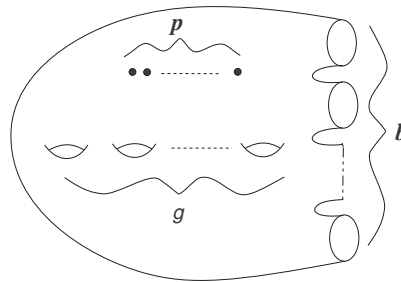
tor yüzeyi elde etmek için  $xy$ -düzleminde  $(2,0)$  merkezli, 1 yarıçaplı bir çember alıp,  $y$ -ekseni boyunca döndürürüz. Oluşan dönel cisim bir tor yüzeyidir. Tor yüzeyini elde etmenin başka bir yolu da, bir dikdörtgenin karşılıklı kenarlarını sırasıyla birbirine yapıştırılmasıyla olur. Küreden farklı olarak, meydana gelen tor yüzeylerinin ortalarında delik vardır (Şekil 2.2). Bu deliğe **cins** denir ve genelde cins sayısı  $g$  harfi ile gösterilir. Dolayısıyla tor yüzeyi, cins 1 ( $g = 1$ ) yüzey olarak ifade edilir ve  $T$  ile de gösterilir.



**Şekil 2.2.** Tor yüzeyi

**Örnek 2.3.** Tor yüzeyleri cins sayısına göre sınıflandırılırlar. Cins sayısı  $g \geq 2$  olan bu yüzeylere **cins  $g$  yüzeyi** denir ve  $gT$  ile gösterilir.

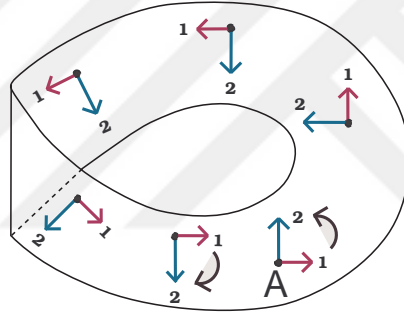
**Tanım 2.3. Yönlendirilebilir Yüzeyler:** Yüzey iki boyutlu olduğundan yüzey üzerinde iki vektör alıyoruz. Bu vektörleri başlangıç noktasından birleştirerek, saat yönünde ya da saatin tersi yönünde olacak şekilde yön veriyoruz (Şekil 2.4'te A noktasında birleştirdiğimiz 1 ve 2 vektörlerine saatin tersi yönünde yön verilmiştir). Bu vektörleri yüzeyin üzerinde herhangi kapalı bir yol boyunca hangi noktaya taşırırsak taşıyalım (seçilen kapalı yoldan bağımsız olarak) tekrar başladığı noktaya geldiğinde yine aynı yönü koruyorsa böyle yüzeylere yönlendirilebilir yüzey denir. Küre ve tor yüzeyi yönlendirilebilir yüzeylere birer örnektir. Biz bu tez çalışmamızda hep yönlendirilebilir yüzeylerle çalışacağız.



**Şekil 2.3.**  $S_{g,p}^b$  yüzeyi

Yönlendirilebilir yüzey denilince, en genel haliyle, sınır sayısı (yüzeyden çıkartılan açık disk sayısı)  $b \geq 0$  olan, içerisinde  $p \geq 0$  adet nokta çıkartılmış, cins  $g$  yüzeyini alacağız. Biz bu yüzeyleri  $S_{g,p}^b$  ile göstereceğiz (Şekil 2.3).

Eğer yüzeyde alınmış, beraber yön verilmiş iki vektör, herhangi bir kapalı yol boyunca hareket ettirildiğinde, beraber yönlerini korumuyorlarsa, bu yüzeye yönlendirilemeyen yüzey denir. Bakınız Şekil 2.4'te **yönlendirilemeyen bir yüzey** olan Möbiüs şeridi verilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi A noktasında 1 ve 2 vektörleri seçilmiş ve bunlara saatin tersi yönünde yön verilmiştir. Şekildeki kapalı yol boyunca vektörleri taşıdığımızda, tekrar başlangıç noktası olan A noktasına geldiğimizde, 1 ve 2 vektörlerinin bu sefer saat yönünde olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla Möbiüs şeridi yönlendirilemeyen yüzeylere bir örnektir.



Şekil 2.4. Möbiüs şeridi

İki adet yüzey verildiğinde, bunları biraraya getirmenin çok kullanışlı bir yolu vardır: Bağlantılı toplam, şimdi tanımını yapalım.

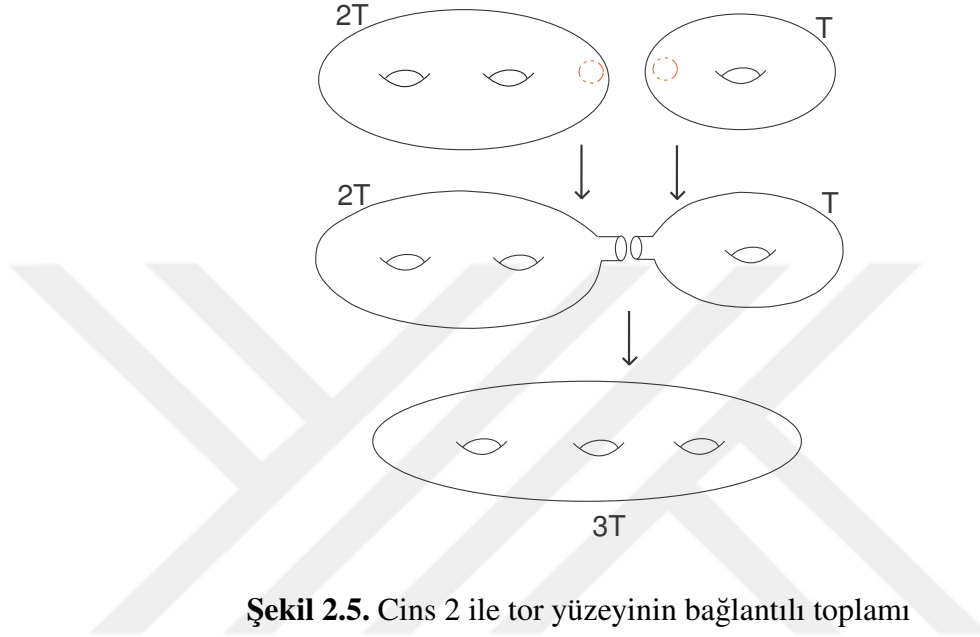
**Tanım 2.4. Bağlantılı Toplam:**  $X$  ve  $Y$  iki yüzey olsun.  $X$  ve  $Y$  yüzeyinin bağlantılı toplamını aşağıdaki gibi tarif ederiz.

1.  $X$  ve  $Y$ 'den iki adet disk  $D$  çıkarılır.
2. Çıkartılan disklerin sınırlarından birbirine denk gelecek şekilde  $X - D$  ve  $Y - D$  yüzeyleri yapıştırılır.

Bu yöntem ile  $X$  ve  $Y$  yüzeylerinin **bağlantılı toplamını** almış oluruz ve bu işlem  $X \# Y$  ile gösterilir. Bakınız Şekil 2.5'te cins 2 yüzeyi ( $2T$ ) ve tor yüzeyinin ( $T$ ) bağlantılı

toplamı gösterilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi cins 2 ( $2T$ ) ve tor yüzeylerinin ( $T$ ) bağlantılı toplamı cins 3 yüzeyi ( $3T$ ) olmuştur.

$$2T \# T = 3T$$



Şekil 2.5. Cins 2 ile tor yüzeyinin bağlantılı toplamı

Topolojide çok önemli bir teorem olan ve birçok yerde kullanılan sınıflandırma teoreminden bahsedeceğiz. Burada kapalı (sınır sayısı  $b = 0$ ), bağlantılı, yönlendirilebilir yüzeylerin sınıflandırılmasını göreceğiz. Yani sınıflandıracığımız yüzeyler  $S_g$ , cins  $g$  yüzeyleri olacak.

**Teorem 2.1. Yüzeylerin Sınıflandırılması Teoremi:** Her kapalı, bağlantılı, yönlendirilebilir yüzey  $m$  tane ( $m \geq 0$ )  $T$  (tor yüzeyi) nin bağlantılı toplamına ( $mT$ ) yüzeyine homeomorfiktir (topolojik olarak denktir). ( $0T$  küreyi temsil eder.)

Bu teoremin ispatı onyıllar almıştır. İspatın ilk versiyonu A.F.Möbius tarafından 1866 yılındaki "Zur theorie der polyeder und der elementarverwandtschaft" makalesinden görebilirsiniz. Buna Max Dehn ve Poul Heegaard tarafından 1907'de yayınlanan "Analysis situs" makalesinde katkılar yapılmıştır. Teoremin son versiyonlarına, 1923'de yayınlanan "Vorlesungen über Topologie" ve 1925'te T.Rado tarafından yayınlanan "Über den begriff der riemannschen flache" isimli yayınlardan ulaşabilirsiniz.

### 3. HOMEOMORFİZMALAR

Bölüm 2’de, Teorem 2.1’de gördüğümüz gibi, iki yüzeyin cins sayısı birbirine eşit ise bu iki yüzey birbirine topolojik olarak denktir, yani homeomorfiktir. Şimdi homeomorfizmanın tanımını hatırlayalım.

**Tanım 3.1. Homeomorfizma:** Birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olan dönüşümlere homeomorfizma denir.

Yüzeyin kendisinden yine kendisine tanımlı homeomorfizmaları kullanarak, aşağıdaki grubu tanımlayalım.

$$\text{Homeo}(S) = \{f : S \rightarrow S \text{ homeomorfizma} \mid f(p) = p, f|_{\partial S} = id\}$$

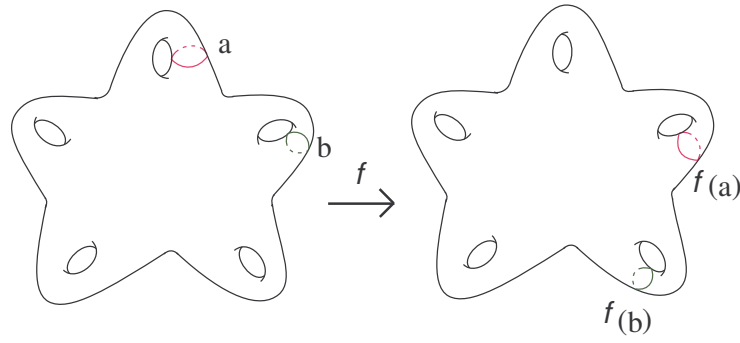
$\text{Homeo}(S)$  kümesi, sınırında birim elemana eşit olan ve varsa üzerindeki noktaları sabit tutup bir  $S$  yüzeyinden, yine kendisine olan tüm homeomorfizmaların kümesi olup, grup özelliği taşır. Yani grubun elemanları olan homeomorfizmalar.

- birleşme özelliği,
- birim eleman özelliği ve
- ters eleman özelliğini sağlar.

Şimdi  $S$  yüzeyini yönlendirilebilir alalım. Eğer  $\text{Homeo}(S)$  grubundan alınan bir homeomorfizma  $S$  yüzeyine uygulandığında yine  $S$  yüzeyini yönlendirilebilir bırakıyorsa, bu homeomorfizmaya yön koruyan homeomorfizma denir.  $S$  yüzeyindeki tüm yön koruyan homeomorfizmaların oluşturduğu grubu ise  $\text{Homeo}^+(S)$  ile göstereceğiz. Bu grup  $\text{Homeo}(S)$  grubunun bir alt grubudur. Şimdi bu iki grubu daha iyi anlayabilmek için, bu grupların elemanı olan homeomorfizmalara örnekler verelim.

#### 3.1. Yüzey Homeomorfizma Örnekleri

**Örnek 3.1.** Cins 5 yüzeyini Şekil 3.1’de verildiği gibi ele alalım. Bu yüzeyin merkezinden bir şiş geçirip, yüzeyi saat yönünde  $2\pi/5$  kadar döndürülmesiyle yüzeyin bir homeomorfizmasını elde etmiş oluruz (Şekil 3.1). Bu homeomorfizma hem  $\text{Homeo}(S)$  hem de  $\text{Homeo}^+(S)$  grubunun bir elemanıdır.

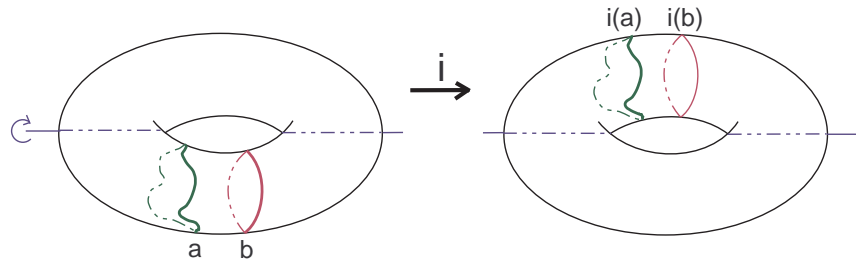


**Şekil 3.1.**  $f$  homeomorfizmasının cins 5 yüzeyine uygulanması

Şekil 3.1'de  $f$  homeomorfizmasının  $a$  ve  $b$  eğrilerine etkisi görülmektedir.

Şekil 3.1'den de görüldüğü gibi,  $f$  homeomorfizmasını 5 kere uygularsak, yüzeyin üstündeki bütün eğriler tekrar kendilerine dönecektir. Bu homeomorfizmanın mertebesi sonludur hatta beştir.

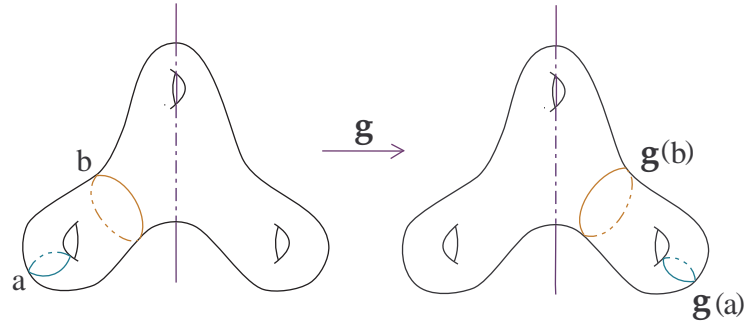
**Örnek 3.2.** Cins 1 yüzeyini ele alalım. Bu yüzeyin tam ortasından geçirilen eksen boyunca yüzeyimizi  $\pi$  kadar döndürdüğümüzde yüzeyin bir homeomorfizması elde edilir (Şekil 3.2). Bu homeomorfizmayı da  $i$  harfi ile gösterirsek,  $i \in \text{Homeo}(S)$  ve  $i \in \text{Homeo}^+(S)$  olduğunu görürüz. Bu homeomorfizmanın mertebesi ikidir.



**Şekil 3.2.** Cins 1 yüzeyine  $i$  dönüşümünün uygulanması

Şekil 3.2'de  $i$  homeomorfizmasının  $a$  ve  $b$  eğrilerine etkisi görülmektedir.

**Örnek 3.3.** Cins 3 yüzeyini Şekil 3.3'te verildiği gibi ele alalım. Bu yüzeyin tam ortasından geçen eksen boyunca yansıma yapıldığında, yüzeyden yine kendisine tanımlı bir homeomorfizma elde edilir (Şekil 3.3). Elde edilen bu homeomorfizmaya  $g$  homeomorfizması diyelim. Bu homeomorfizma  $\text{Homeo}(S)$  grubunun bir elemanı iken



**Şekil 3.3.** Cins 3 yüzeyinde yansıma dönüşümü

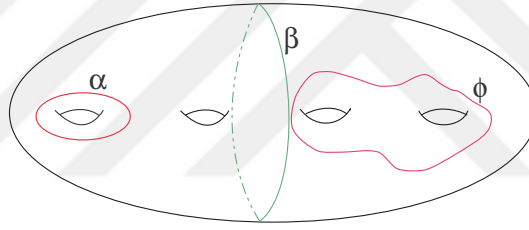
$Homeo^+(S)$ 'in bir elemanı değildir ( $g$  homeomorfizması yön koruyan bir homeomorfizma değildir). Bu homeomorfizmanın da yine mertebesi sonlu, hatta mertebesi ikidir.

Şekil 3.3'te  $g$  homeomorfizmasının  $a$  ve  $b$  eğrilerine etkisi görülmektedir.

#### 4. YÜZEYLERİN İZOTOPI SINIFI

Bölüm 3.1’de yüzey homeomorfizmalarına birkaç örnek gördük. Bunların hepsinin mertebesi de sonlu idi. Bunların yanında mertebesi sonsuz olan yüzey homeomorfizmaları da vardır. Dolayısıyla yüzey homeomorfizmaları çok büyük bir grup oluşturur. Bu nedenle homeomorfizmalar üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayıp, homeomorfizmaları denkliklerine göre sınıflandırma ihtiyacı hissederiz. Bunun için de **izotopi-den** yararlanırız. Şimdi izotopinin tanımını vereceğiz. Bunun için de ilk olarak kapalı eğri tanımı ve eğrilerin izotopik olmasını göreceğiz.

**Tanım 4.1. Basit kapalı eğri:** Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan ve hiçbir noktada kendi kendini kesmeyen eğrilere basit kapalı eğri denir. Şekil 4.1’de  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\phi$  cins dört yüzeyindeki basit kapalı eğrilere birer örnektir.



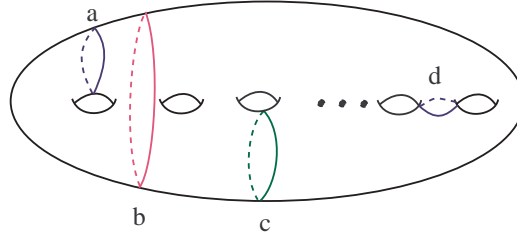
Şekil 4.1. Basit kapalı eğriler

Basit kapalı eğrileri iki gruba ayıracağız: Yüzeyi ayıran ve yüzeyi ayırmayan eğriler. Bunları tanımlayalım şimdi:

**Tanım 4.2. Yüzeyi ayıran eğri:** Bağlantılı bir yüzeyde, bir eğri boyunca yüzeyi kesince, yine bağlantılı bir yüzey elde edilirse bu eğriye **yüzeyi ayırmayan eğri** denir. Ancak eğri boyunca kesince bağlantılı olmayan bir yüzey elde ediliyorsa, bu eğriye **yüzeyi ayıran eğri** denir. Bir basit kapalı eğrinin yüzeyi ayıran veya ayırmayan olduğunu anlamak için bu eğriyi bir noktada kesen kapalı bir eğri bulabiliyor muyuz buna bakmamız gerekir. Eğer böyle bir eğri bulabiliyorsak bu eğri, yüzeyi ayırmayan eğridir. Eğer böyle bir eğri bulamıyorsak eğri, yüzeyi ayıran eğridir (Şekil 4.2).

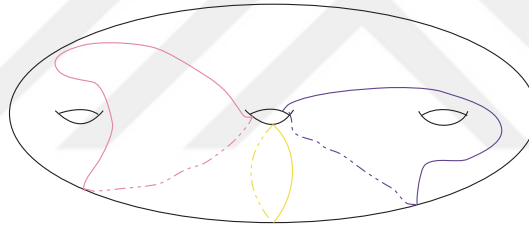
**Tanım 4.3. İzotopi:** En basit tanımıyla izotopi; bir eğri deformasyonla başka bir eğriye dönüştürülebiliyorsa bu iki eğriye birbirine **izotopiktir** denir. Başka bir ifadeyle

izotopi; bir basit kapalı eğrinin diğer bir basit kapalı eğriye sürekli olarak dönüşümüdür ki herbir adımda yine bir basit kapalı eğri elde edilir. İzotopi'yi bu çalışmada ' $\simeq$ ' işareti ile göstereceğiz.



**Şekil 4.2.** a,c,d yüzeyi ayırmayan eğriler ve b yüzeyi ayıran eğri

Aşağıdaki Şekil 4.3'te cins üç yüzeyi üzerinde üç adet basit kapalı eğri:  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  verilmiştir. Bu kapalı eğrilerden  $\alpha \simeq \beta$ , fakat  $\alpha \not\sim \gamma$  ve  $\beta \not\sim \gamma$  olduğunu görürüz.



**Şekil 4.3.**  $\alpha \simeq \beta$ ,  $\alpha \not\sim \gamma$  ve  $\beta \not\sim \gamma$

Şimdi homeomorfizmalar için izotopinin tanımını verelim.

**Tanım 4.4.** Bir  $S$  yüzeyinde iki adet homeomorfizma,  $f, g \in \text{Homeo}(S)$  alalım. Eğer  $S$  yüzeyindeki herhangi bir basit kapalı eğri  $\alpha \in S$  için,  $f(\alpha)$  basit kapalı eğrisi,  $g(\alpha)$  basit kapalı eğrisine izotopik oluyorsa,  $f$  homeomorfizması  $g$  homeomorfizmasına izotopiktir denir.

Yukarıdaki Tanım 4.4'e denk olan aşağıdaki tanımı da verebiliriz.

**Tanım 4.5.**  $f, g : S \rightarrow S$  homeomorfizmalar olsun.

- $I(x, 0) = f(x)$
- $I(x, 1) = g(x)$  ve



- her  $t \in [0, 1]$  için  $I(x, t) : S \rightarrow S$  homeomorfizmalar olacak şekilde bir  $I(x, t) : S \times [0, 1] \rightarrow S$  sürekli dönüşümü bulunabiliyor ise  $f$  homeomorfizması  $g$  homeomorfizmasına **izotopiktir** denir ve  $f \simeq g$  şeklinde gösterilir.

$S$  yüzeyinde tanımlı herhangi iki homeomorfizmanın izotopik olmasını tanımladıktan sonra, aşağıdaki grubu tanımlayabiliriz:

$$Homeo_0(S) = \{f \in Homeo(S) \mid f \simeq id\}$$

$Homeo_0(S)$  grubu  $Homeo(S)$  grubundaki homeomorfizmaların, birim elemana izotopik olanlarının oluşturduğu bir gruptur. Bu grup  $Homeo(S)$  grubunun bir normal alt grubudur. Bu gruba Bölüm 5'te gönderim sınıf gruplarını tanımlarken ihtiyaç duyacağız.

## 5. GÖNDERİM SINIF GRUBU TANIM VE ÖRNEKLER

Bu bölümde gönderim sınıf gruplarını tanımlayıp, birkaç yüzeyin gönderim sınıf gruplarını hesaplayacağız.

**Tanım 5.1. Gönderim sınıf grubu:** Yönlendirilebilir bir  $S$  yüzeyinin **gönderim sınıf grubu**;  $S$  yüzeyinden kendisine olan homeomorfizmaların, izotopi sınıflarının oluşturduğu bir gruptur. Daha açık yazmak gerekirse, üçüncü bölümde tanımladığımız  $Homeo(S)$  grubundan alınan bir  $h$  homeomorfizmasına izotopik olan bütün homeomorfizmaların sınıfını  $[h]$  ile gösterirsek; bu sınıfa  $h$  **homeomorfizmasının gönderim sınıfı** denir.  $S$  yüzeyinin tüm gönderim sınıflarının oluşturduğu gruba ise **gönderim sınıf grubu** denir. Grubun elemanları homeomorfizma sınıfları olduğundan, grubun işlemi de bu homeomorfizmaların bileşke işlemidir ve grup  $Mod(S)$  ile gösterilir. Dolayısıyla gönderim sınıf grubundan bir eleman alınca aslında bir gönderim sınıfı yani izotopi sınıfı almış oluyoruz. Ancak biz yazım ve anlatım kolaylığı bakımından gönderim sınıfı ve o sınıfa ait homeomorfizmaları aynı notasyonla göstereceğiz.

Bu tanıma denk olarak aşağıdaki tanımı da verebiliriz.

**Tanım 5.2.** Bir  $S$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu bu yüzeydeki yön koruyan homeomorfizmaların birim elemana izotopik olan homeomorfizmalara bölümünden elde edilir.

$$Mod(S) = Homeo^+(S)/Homeo_0(S)$$

### 5.1. Örnekler

Bu alt bölümde kapalı disk ( $D^2$ ), küre ( $S^2$ ) ve bir sınır parçası olan kürenin ( $S_{0,1}$ ) gönderim sınıf gruplarını inceleyeceğiz.

İlk olarak Alexander Önsav'ını göreceğiz ki bu bize kapalı diskin gönderim sınıf grubunu verecek. Örnek 5.2'de de kürenin gönderim sınıf grubunu hesaplarken yine Önsav 5.1'i kullanacağız.

**Örnek 5.1.** İlk olarak kapalı diskin gönderim sınıf grubunu bulalım.

**Önsav 5.1. (Alexander Önsavı)** Kapalı diskin gönderim sınıf grubu, tek elemanlı (birim eleman) grup olan bariz gruptur.

Alexander Önsav'ı bize, kapalı diskten yine kendisine ve diskin sınırında birim elemanı veren herhangi bir homeomorfizm  $\phi$  aldığımızda,  $\phi$  homeomorfizmasının birim dönüşümüne izotopik olduğunu söyler. Önsavın ispatında bu izotopiyi açık açık yazacağız.

*Kanıt.*  $D^2$ 'yi,  $\mathbb{R}^2$ 'de merkezi orijinde olan kapalı birim disk ile özdeşleştirelim.  $\phi$ ,  $D^2$ 'den yine kendisine ve  $D^2$ 'nin sınırında birim elemanı veren herhangi bir homeomorfizma olsun.

$0 \leq t < 1$  için  $I(x, t)$  dönüşümünü aşağıdaki parçalı fonksiyon ile tanımlayalım:

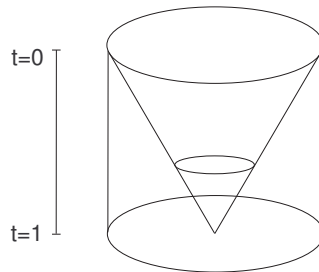
$$I(x, t) = \begin{cases} (1-t)\phi\left(\frac{x}{1-t}\right) & , 0 \leq |x| < 1-t \\ x & , 1-t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

$t = 1$  için ise  $I(x, 1)$  dönüşümü  $D^2$ 'de birim dönüşümünü verecek şekilde tanımlayalım.

Görüldüğü gibi  $I(x, t) : D^2 \times [0, 1] \longrightarrow D^2$  sürekli bir dönüşümdür, öyle ki

- her  $t \in [0, 1]$  için  $I(x, t)$ ,  $D^2$ 'den yine kendisine tanımlı birer homeomorfizmadır,
- $I(x, 0) = \phi$  ve
- $I(x, 1) = id$  dir.

Dolayısıyla  $\phi \simeq id$  ve  $Mod(D^2) = \{id\}$ . □



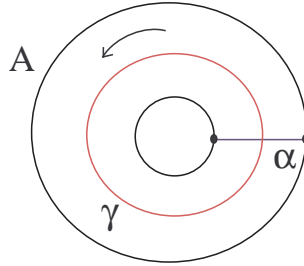
**Şekil 5.1.**  $\phi \simeq id$

**Örnek 5.2.** Kürenin gönderim sınıf grubunu hesaplayalım.

Kürenin üzerinde aldığımız herhangi iki basit kapalı eğriden birini diğerine sürekli bir deformasyonla dönüştürebiliriz. Dolayısıyla küre üzerinde herhangi bir homeomorfizma  $f$  alalım. Küre üzerindeki herhangi bir basit kapalı eğri  $\alpha$ 'ya  $f$  dönüşümünü uyguladığımızda, başka bir basit kapalı eğri  $\beta$  elde ederiz. Yani  $\beta = f(\alpha) \simeq id(\alpha) = \alpha$  olur. Tanım 4.4'ü kullanarak  $f \simeq id$  söylemiş oluruz. Bu da bize  $Mod(S^2) = \{id\}$  olduğunu verir.

**Örnek 5.3.** Bir sınır bileşeni olan küre,  $S_{0,1}$ 'in gönderim sınıf grubunun,  $Mod(S_{0,1}) = \{id\}$  olduğunu gösterelim.

Bir sınır bileşeni olan küre ile bir noktası çıkarılmış küreyi aynı (homeomorfik) düşünebiliriz. Bir noktası çıkarılmış kürenin her noktasını düzlemdeki bir nokta ile eşleştirebiliriz. Daha açıklayıcı olmak gerekirse:  $S_{0,1}$  ile  $\mathbf{R}^2$  stereografik izdüşüm ile birbirine homeomorfiktir. Dolayısıyla  $\mathbf{R}^2$ 'nin gönderim sınıf grubunu bulmamız yeterli olacaktır. Düzlemde yine düzleme tanımlı, herhangi bir yön koruyan homeomorfizma  $\phi$  alalım. Düzlemde düz çizgi homotopisi  $I(x, t) = tx + (1 - t)\phi(x)$ 'yi kullanarak, Tanım 4.5'den  $\Phi \simeq id$  olduğunu görürüz. Bu da bize  $Mod(S_{0,1}) = \{id\}$  sonucunu verir.



**Şekil 5.2.** A halkası

**Örnek 5.4.**  $A = S^1 \times [0, 1]$  halkası için  $Mod(A) \cong \mathbb{Z}$  (tamsayılar grubuna izomorfik) olduğunu kanıtlayalım.

Yönlendirilmiş A halkasının etrafında hiç dönmeyen, başlangıç ve bitiş noktaları halkanın farklı sınırlarında olan bir yay alalım ve buna  $\alpha$  diyelim (Şekil 5.2).  $\psi : Mod(A) \rightarrow \mathbb{Z}$  bir homomorfizma olsun. Öyle ki bir  $f \in Mod(A)$  homeomorfizması için  $\psi$  homomorfizması  $f(\alpha)$ 'nın A halkasının merkez çemberi  $\gamma$  etrafında (A'nın yönünde veya

tersi yönünde) ne kadar döndüğünü gösterebiliriz.  $\psi$ 'nin örten olduğunu göstermek kolaydır. Görüntü kümesinden aldığımız her  $n \in \mathbb{Z}$  için  $\psi(T_\gamma^n(\alpha)) = n$  olacak şekilde bir homeomorfizma  $(T_\gamma^n)$  vardır. Bir sonraki bölümde, bu  $T_\gamma^n$  elemanını ayrıntılarıyla göstereceğiz. Dolayısıyla  $\psi$  örtendir. Şimdi  $\psi$  homeomorfizmasının  $1 - 1$  olduğunu gösterelim.  $\varphi$ ,  $A$ 'dan yine  $A$ 'ya tanımlı sınır noktalarını sabit bırakan bir homeomorfizma olsun.  $\varphi(\alpha) \sim \alpha$  ise  $\varphi(\alpha) = \alpha$  olduğunu kabul edebiliriz.  $A$  halkasını  $\alpha$  yayı boyunca keselim. Bunun sonucunda kapalı bir disk elde ederiz. Şimdi  $\varphi$  homeomorfizması kapalı diskten yine kendine tanımlı, diskin bütün sınırlarını sabit tutan bir homeomorfizma olmuş olur. Yani  $\varphi$  homeomorfizması kapalı diskin gönderim sınıf grubunun bir elemanı olmuş olur,  $\varphi \in \text{Mod}(D^2)$  olur. Önsav 5.1'den  $\text{Mod}(D^2) = \{id\}$  olduğundan,  $\varphi$  homeomorfizması birim elemana izotopiktir. Dolayısıyla  $\psi$  homeomorfizması  $1 - 1$ 'dir. Sonuç olarak  $\text{Mod}(A) \cong \mathbb{Z}$  göstermiş oluruz.

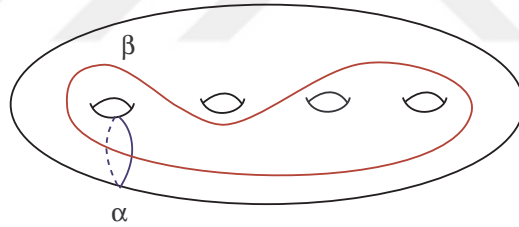
## 6. GÖNDERİM SINIF GRUPLARININ ÜRETEÇLERİ

Bu bölümde asıl amacımız gönderim sınıf gruplarının üreteçleri olan Dehn burgularını incelemektir.

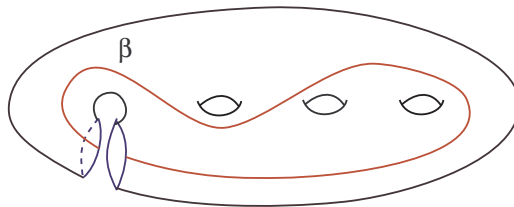
### 6.1. Dehn Burgusu

Dehn burguları ilk olarak Max Dehn tarafından tanıtılmıştır (Dehn, 1922). Dehn orjinalinde bu burğu için "vidalamak" manasına gelen bir Almanca isim vermiştir ancak biz onu Türkçe'ye burğu dönüşümü olarak çeviriyoruz. Daha sonrasında bu terime Max Dehn'e ithaf edildiği için "**Dehn burğusu**" adı verilmiştir. Dehn burğularının mertebesi sonsuz olmakla beraber yüzeylerin gönderim sınıf grubunu üretmede önemli rol oynamaktadırlar.

İlk olarak, yönlendirilmiş (saatin tersi yönünde) bir yüzey ve bu yüzeyde bir  $\alpha$  basit kapalı eğri alalım (Şekil 6.1) ve yüzeyimizi bu  $\alpha$  basit kapalı eğri boyunca kestiğimizi hayal edelim (Şekil 6.2). Böylelikle yüzeyde iki tane daha sınır elde etmiş oluruz.



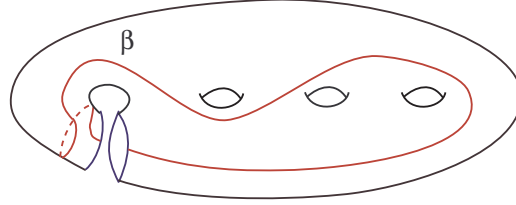
**Şekil 6.1.**  $\alpha$  eğri boyunca Dehn burğusu birinci adım



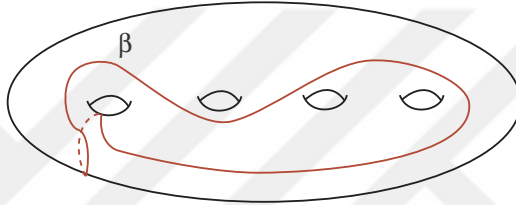
**Şekil 6.2.**  $\alpha$  eğri boyunca Dehn burğusu ikinci adım

Bu sınırlardan bir tanesi sabit tutulup, diğerini 360 derece sağa döndürülür (Şekil 6.3). Daha sonra tekrar tüm noktaları birbirine karşılık gelecek şekilde yapıştırılır (Şekil

6.4). Bu şekilde sürekli ve tersi de (tersini de sınırlardan birini 360 derece sola döndürerek elde ederiz) sürekli bir dönüşüm elde edilir.



**Şekil 6.3.**  $\alpha$  eğrisi boyunca Dehn burgusu üçüncü adım



**Şekil 6.4.**  $\alpha$  eğrisi boyunca Dehn burgusu dördüncü adım

Böylece bir homeomorfizma elde etmiş oluruz ki buna  $\alpha$  etrafındaki **sağ** veya **pozitif Dehn burgusu** denir ve  $T_\alpha$  ile gösterilir. Anlatım kolaylığı açısından homeomorfizma ve o homeomorfizmanın bulunduğu izotopi sınıfını aynı gösterdiğimizizi bir kez daha hatırlatalım. Dolayısıyla yukarıda tanımladığımız  $T_\alpha$  homeomorfizmasına gönderim sınıf grubunun bir elemanı diyebiliriz. Benzer şekilde, yüzeyimizi  $\alpha$  eğrisi boyunca kesince, meydana gelen iki sınır komşuluğundan bir tanesini sol yönde çevirerek elde ettiğimiz burguya da **sol** veya **negatif Dehn burgusu** denir ve  $T_\alpha^{-1}$  ile gösterilir. Bu çalışmamızda ard arda sıralanmış Dehn burgularını ve diğer sıralı homeomorfizmaları uygularken hep sağdan başlayıp sola doğru uygulayacağız.

Dikkat etmeliyiz ki, sağ veya sol burğu, yüzeyimizi yönlendirdiğimiz için manalı oluyor. Bir eğri boyunca sağ veya sol Dehn burğu yapmanın, eğrinin herhangi bir yönlendirilmesi ile hiçbir ilişkisi yoktur.

## 6.2. Dehn Burgusunun Bazı İlişkileri

Bir önceki bölümde belirttiğimiz gibi, homeomorfizma ve homeomorfizmaların izotopi sınıfını aynı harf ile gösterdiğimiz gibi, çalışmamız boyunca basit kapalı eğriler ve

onların izotopi sınıflarını da aynı harf ile göstereceğiz.

Şimdi herhangi tıkHz, yönlendirilebilir bir  $S$  yüzeyi üzerinde, bazı eğriler ve bunlar boyunca uygulanan Dehn burguları üzerine birtakım özellikler göreceğiz. Bu özelliklerde bazı eşitliklerden bahsedeceğiz, ancak birkez daha hatırlatalım ki, eşitlikler ifadelere izotopik olduğunu gösteriyor. Bütün özelliklerin ispatını vermesek de, gerekli olan açıklamaları yapacağız.

**Gerçek 6.1.**  $f \in \text{Mod}(S)$  ve  $a, S$  yüzeyi üzerinde herhangi bir basit kapalı eğri olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$T_{f(a)} = fT_a f^{-1}.$$

Eşitliğin sağından başlarsak:

$f^{-1}$  homeomorfizması  $f(a)$ 'nın düzgün bir komşuluğunu,  $a$  eğrisinin bir komşuluğuna taşır. Burada  $T_a$ 'yı uygulayıp, tekrar  $T_a$  burgusu uygulanmış komşuluğu  $f$  ile  $f(a)$ 'nın komşuluğuna geri gönderdiğimizde, sonuç olarak eşitliğin sol tarafını elde ettiğimizi görürüz. Yani  $f(a)$  boyunca Dehn burgusu uygulamış oluruz.

**Tanım 6.1. Geometrik Kesişim Sayısı:** Bir  $S$  yüzeyinde  $a$  ve  $b$  herhangi iki basit kapalı eğri olsun.  $a$  ve  $b$  eğrilerinin **geometrik kesişim sayısı**  $i(a, b)$ ,  $|\alpha \cap \beta|$ 'nin minimum sayısıdır. Öyle ki  $\alpha$  ve  $\beta$  sırasıyla  $a$  ve  $b$  ye homotopik bütün eğrilerin temsilcileridir.

**Gerçek 6.2.** Eğer  $i(a, b) = 0$  ise  $T_a(b) = b$  olur.

$a$  ve  $b$  ayrık eğriler olduğundan,  $b$  eğrisine,  $a$  eğrisi boyunca Dehn burgusunun bir etkisi olmayacaktır.

**İlişki 6.1.** Eğer  $i(a, b) = 0$  ise o zaman  $T_a T_b = T_b T_a$ 'dır.

*Kanıt.*  $T_a T_b = T_b T_a$  eşitliğini, sağ tarafından birim elemana denk olan  $T_a^{-1} T_a$  ile çarparsak sonucumuz değişmeyecektir:

$$T_a T_b = T_a T_b T_a^{-1} T_a$$

Şimdi  $f = T_a$  alıp Gerçek 6.1'i uygularsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$T_a T_b = f T_b f^{-1} T_a = T_{f(b)} T_a = T_{T_a(b)} T_a.$$



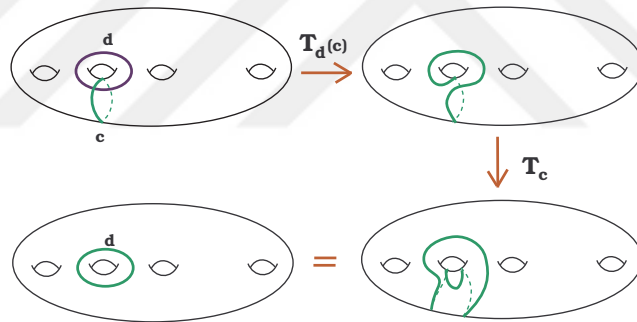
$a, b$  eğrileri ayrık olduğundan, Gerçek 6.2’i uygularsak;  $T_a(b) = b$  olacağından, sonuç olarak

$$T_a T_b = T_b T_a$$

elde ederiz. □

**İlişki 6.2.** Eğer  $i(a, b) = 1$  ise o zaman  $T_a T_b(a) = b$ ’dir.

*Kanıt.* Geometrik kesişim sayısı bir olan  $a$  ve  $b$  eğrilerini alalım.  $a$  ve  $b$  eğrilerinin kesişim sayılarından anlıyoruz ki,  $a$  ve  $b$  eğrileri yüzeyi ayırmayan eğrilerdir. Dolayısıyla yüzeyi ayırmayan  $a, b$  eğri çiftini şekildeki gibi  $c, d$  eğri çiftine taşıyan bir homeomorfizma vardır (Yüzeylerin Sınıflandırılması Teoreminden). Dolayısıyla  $c, d$  çifti için bu eşitliği ( $T_c T_d(c) = d$ ) göstermemiz yeterli olacaktır. Bunu da Şekil 6.5’te açıkça görebiliriz.



**Şekil 6.5.**  $T_c T_d(c) = d$  eşitliğinin ispatı

□

**Önsav 6.1.** Yüzeyde aldığımız herhangi iki yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğri boyunca uygulanan Dehn burguları birbirinin eşleniğidir.

*Kanıt.*  $a$  ve  $b$ ,  $S$  yüzeyinde yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğriler olsun. O zaman yüzeylerin sınıflandırılması teoreminden  $S$  yüzeyinin gönderim sınıf grubundan bir  $f$  homeomorfizması bulabiliriz öyle ki  $f(a) = b$  olur. O zaman Gerçek 6.1’den

$$T_b = T_{f(a)} = f T_a f^{-1}$$

elde etmiş oluruz. □

**İlişki 6.3. [Örgü İlişkisi]** Eğer  $i(a, b) = 1$  ise o zaman  $T_a T_b T_a = T_b T_a T_b$  olur.

*Kanıt.*  $T_a T_b T_a$  homeomorfizmasını birim eleman olan  $T_b^{-1} T_a^{-1} T_a T_b$  ile sağ taraftan (bileşkesini alalım) çarpalım.

$$T_a T_b T_a = T_a T_b T_a (T_b^{-1} T_a^{-1} T_a T_b)$$

$f = T_a T_b$  olarak kabul edip, Gerçek 6.1'i uygularsak

$$T_a T_b T_a = f T_a f^{-1} T_a T_b = T_{T_a T_b(a)} T_a T_b$$

olur.

İlişki 6.2'den  $T_a T_b(a) = b$  olduğundan

$$T_a T_b T_a = T_b T_a T_b$$

elde etmiş oluruz. □

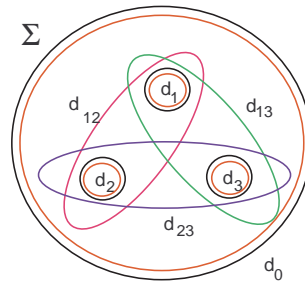
Sırada ilk olarak 1920 yıllarında Max Dehn tarafından bulunan fakat daha sonra 70'li yıllarda D.Johnson tarafından yeniden keşfedilen ve gönderim sınıf grubunun birçok değişik özelliğinin ispatında kullandığımız lantern ilişkisini ve ispatını göreceğiz.

Çalışmamızın bu bölümde kalan kısmında yazım kolaylığı ve takip etme kolaylığı bakımından; küçük harfle gösterdiğimiz eğrilerin etrafındaki Dehn burgusunu, aynı harfin büyük harfle yazılımı ile göstereceğiz. Örnek vermek gerekirse,  $a$ ,  $a_i$  ve  $a_{ij}$  eğrileri boyunca uygulanan Dehn burgularını sırasıyla  $A$ ,  $A_i$  ve  $A_{ij}$  ile göstereceğiz.

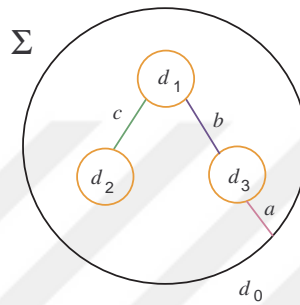
**İlişki 6.4. Lantern (Fener) İlişkisi:**  $\Sigma$  yüzeyi, sınırları  $d_0, d_1, d_2, d_3$  olan bir küre ve  $1 \leq i < j \leq 3$  için  $d_{ij}$ ;  $d_i$  ve  $d_j$  sınır bileşenlerini Şekil 6.6'daki gibi çevreleyen basit kapalı eğriler olsun.  $\Sigma$  küresinin, yönlendirilmiş bir S yüzeyine gömüldüğünü varsayalım, o zaman S yüzeyinin gönderim sınıf grubunda aşağıdaki ilişki sağlanır.

$$D_0 D_1 D_2 D_3 = D_{12} D_{23} D_{13}$$

Gönderim sınıf gruplarındaki bu eşitliğe **lantern (fener) ilişkisi** denir.



Şekil 6.6. Dört delikli küre



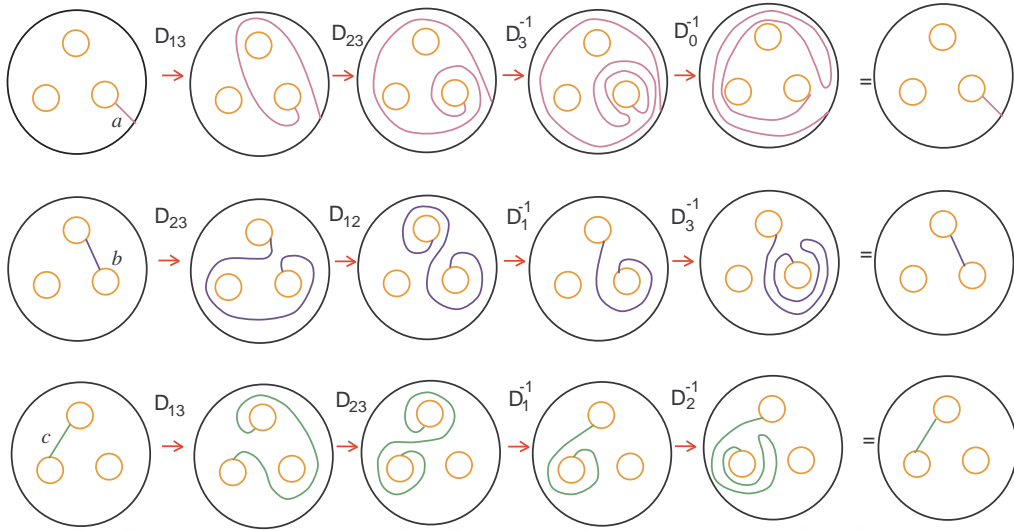
Şekil 6.7.  $a, b$  ve  $c$  yayları

*Kanıt.* Sınırları  $d_0, d_1, d_2$  ve  $d_3$  olan  $\Sigma$  küresini Şekil 6.7'deki  $a, b$  ve  $c$  yayları boyunca kesersek, sınırı  $d_0, d_1, d_2, d_3, a, b, c$  yaylarının birleşiminden oluşan bir disk elde ederiz. Şimdi izotopik olduğunu göstermeye çalıştığımız,  $\Sigma$ 'nın gönderim sınıf grubundan aldığımız elemanlara,  $f = D_0 D_1 D_2 D_3$  ve  $g = D_{12} D_{23} D_{13}$  diyelim. Başka bir deyişle amacımız  $f^{-1}g = id$  olduğunu göstermektir. Bunun için de aslında  $f^{-1}g$  elemanının, diskin gönderim sınıf grubuna ait olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Çünkü biliyoruz ki, Alexander Önsav'ından, disk yüzeyinin gönderim sınıf grubundaki her eleman, birim elemana ( $id$ ) izotopiktir. Bunun için  $f^{-1}g$  elemanının sadece  $a, b$  ve  $c$  yaylarını sabit bıraktığını göstermemiz yeterlidir çünkü  $f$  ve  $g$  elemanı 4 delikli küre  $\Sigma$ 'nın gönderim sınıf grubunda olduğundan, kürenin sınırları olan  $d_0, d_1, d_2, d_3$ 'ü zaten sabit bırakmaktadır.

Yukarıdaki Şekil 6.8 takip edilirse,  $f^{-1}g$  homeomorfizmasının  $a, b$  ve  $c$  yaylarını sabit bıraktığı görülür. Böylelikle  $f$  homeomorfizmasının  $g$  homeomorfizmasına izotopik olduğu gösterilmiş olur.

□

### İlişki 6.5. Zincir İlişkisi



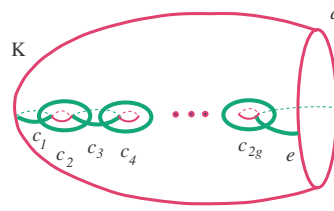
**Şekil 6.8.**  $a, b, c$  yaylarına  $f^{-1}g$  dönüşümünün uygulanışı

**Tanım 6.2. Zincir:**  $\Sigma$  yüzeyinde  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ; basit kapalı eğrilerin, izotopi sınıflarının, bir dizisi olsun. Eğer ardışık eğriler birbirleriyle bir defa kesişip diğerleriyle hiç kesişmiyorsa bu eğri dizisine **zincir** denir.

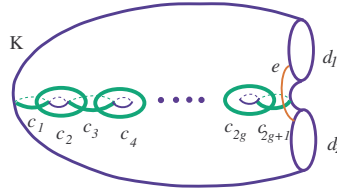
Zincirdeki bu eğrilerin birleşiminin düzgün bir komşuluğu  $K$  alalım. Dizideki eğri sayısının çift veya tek olma durumuna göre farklı  $K$  yüzeyleri elde ederiz. Şöyle ki; Eğer  $n = 2g$  ise bir sınır bileşeni olan; ki bu bileşene de  $d$  diyelim; yönlendirilmiş  $g$ -cinsli tor yüzeyini; Eğer  $n = 2g + 1$  ise iki sınır bileşeni olan; bunlara  $d_1, d_2$  diyelim; yönlendirilmiş  $g$ -cinsli tor yüzeyini elde ederiz. O zaman eğri sayısının çift ve tek olma durumuna göre elde ettiğimiz  $K$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunda sırasıyla aşağıdaki ilişkiler doğrudur:

- $(C_1 C_2 \dots C_{2g})^{4g+2} = D$
- $(C_1 C_2 \dots C_{2g+1})^{2g+2} = D_1 D_2.$

*Kanıt.* İlk olarak zincirde çift sayıda eğri olma durumunu inceleyeceğiz. Bu durumda  $K$  yüzeyi Şekil 6.9'daki gibi sınırı  $d$  olan bir sınırlı  $g$  cinsli tor yüzeyidir.  $h = C_1 C_2 \dots C_{2g}$  dersek  $h^{4g+2} D^{-1} = id$  olduğunu göstereceğiz. Bunu da yaparken, lantern ilişkisinin ispatında kullandığımız "Alexander Önsav" ını kullanacağız.  $K$  yüzeyini  $c_2, c_3, \dots, c_{2g-1}, c_{2g}$  eğrileri ve  $e$  yayı boyunca kesersek sınırları  $d, c_{2g}, \dots, c_3, c_2$  eğriler ve  $e$  yayı olan

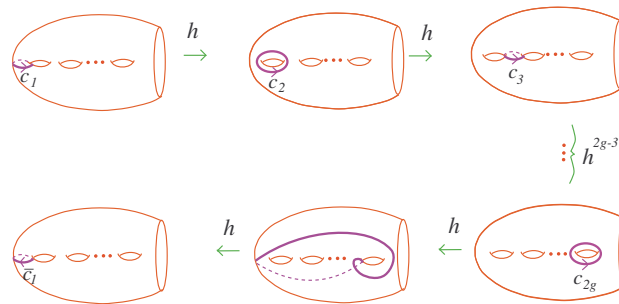


**Şekil 6.9.** Çift sayıda eğri zincirinin komşuluğu



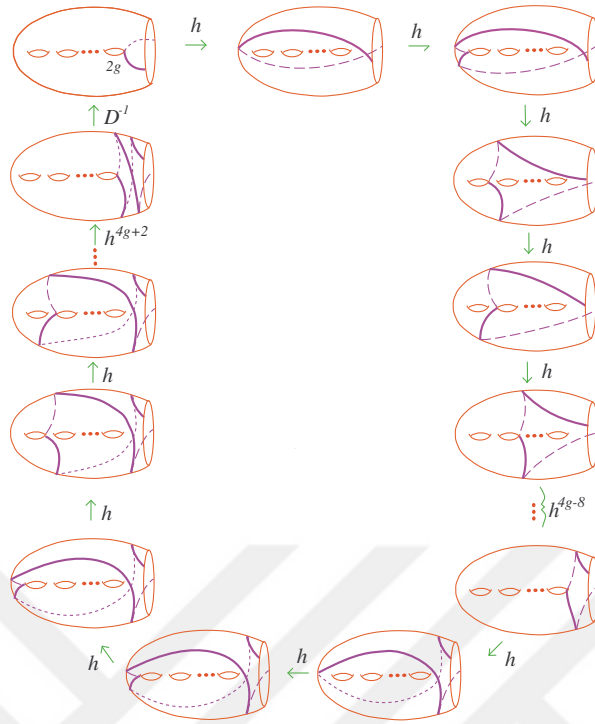
**Şekil 6.10.** Tek sayıda eğri zincirinin komşuluğu

bir disk elde etmiş oluruz. Dolayısıyla  $h^{4g+2}D^{-1}$  homeomorfizmasının diskin gönderim sınıf grubunun bir elemanı olduğunu, yani diskin sınırlarını oluşturan  $e$  yayı ve  $d, c_{2g}, \dots, c_3, c_2$  kapalı eğrilerini sabit tuttuğunu göstereceğiz. Bunlardan  $d$  eğrisini sabit tuttuğunu göstermemize gerek yoktur. Çünkü  $h^{4g+2}D^{-1}$  homeomorfizması zaten sınırı  $d$  olan yüzeyin gönderim sınıf grubunun bir elemanı olduğundan,  $d$  sınırını sabit bırakmaktadır.



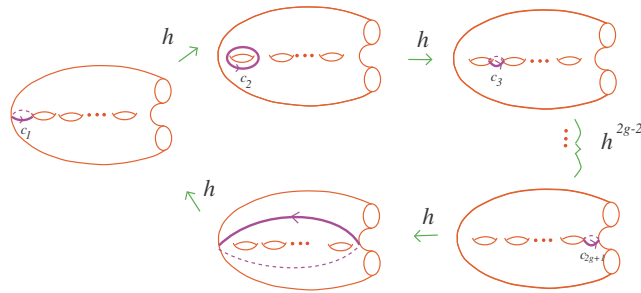
**Şekil 6.11.**  $c_i$  eğrilerine  $h$  homeomorfizmasının uygulanması

Şekil 6.11'den de anlaşılacağı gibi her  $i = 1, 2, \dots, 2g - 1$  için  $h = C_1C_2\dots C_{2g}$  olmak üzere,  $h$  homeomorfizması yönlendirilmiş  $c_i$  eğrisini  $c_{i+1}$  eğrisine götürüyor, yani  $h(c_i) = c_{i+1}$  oluyor. Son olarak  $c_{2g}$  eğrisine  $h^2$  uyguladığımızda  $c_1$  eğrisinin ters yönüne götürüyor. Dolayısıyla  $x \in \{c_1, c_2, \dots, c_{2g}\}$  olmak üzere bu döngüyü iki kere uyguladığımızda  $h^{4g+2}(x) = (x)$  olur. Basit kapalı eğriler  $x$  ve  $d$  hiç kesişmediğinden Gerçek 6.2'den  $h^{4g+2}D^{-1}(x) = x$  olur.



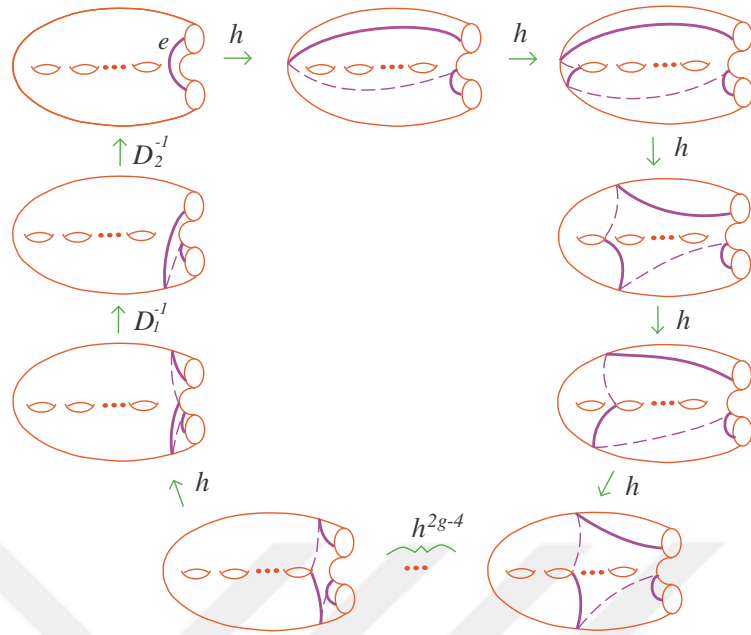
**Şekil 6.12.**  $h^{4g+2}D^{-1}(e) = e$

Şimdi geriye  $h^{4g+2}D^{-1}$  homeomorfizmasının  $e$  yayını koruduğunu göstermek kaldı ki bunu da Şekil 6.12’de gösteriyoruz. Burada  $e$  yayının her bir  $h$  dönüşümü altındaki görüntüsünü görüyoruz. Son olarak  $D^{-1}$  uygulandığında tekrar aynı yayı elde ediyoruz. Sonuç olarak  $x \in \{c_1, c_2, \dots, c_{2g}, e\}$  için  $h^{4g+2}(x) = (x)$  olduğunu göstermiş oluyoruz. Dolayısıyla  $h^{4g+2}D^{-1} \in Mod(D^2)$  olur. Alexander Önsav’ından  $h^{4g+2}D^{-1} = id$  ve  $h^{4g+2} = D$  olduğunu göstermiş oluruz.



**Şekil 6.13.**  $c_i$  eğrilerine  $h$  homeomorfizmasının uygulanması

Şimdi de zincirde tek sayıda eğri olma durumunu inceleyeceğiz. Bu durumda  $K$  yüzeyi Şekil 6.10’daki gibi iki sınır bileşeni ( $d_1$  ve  $d_2$ ) olan  $g$  cinsli tor yüzeyidir.  $h =$



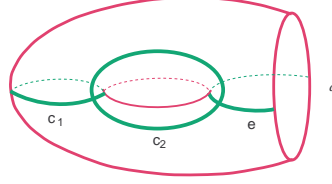
Şekil 6.14.  $h^{2g+2} D_1^{-1} D_2^{-1}(e) = (e)$

$C_1 C_2 \dots C_{2g+1}$  ve  $g = D_1 D_2$  dersek  $h^{2g+2} g^{-1} = id$  olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için biraz önce yaptığımız gibi yine "Alexander Önsav"ını kullanacağız.  $K$  yüzeyini  $c_2, c_3, \dots, c_{2g+1}$  eğrileri boyunca kestiğimizde sınırları  $d_1, d_2, c_{2g+1}, c_{2g}, \dots, c_2$  eğrileri ve  $e$  yayı olan bir disk elde etmiş oluruz. Dolayısıyla  $h^{2g+2} g^{-1}$  homeomorfizmasının diskin sınırları olan  $d_1, d_2, c_{2g+1}, c_{2g}, \dots, c_2$  eğrileri ve  $e$  yayını sabit tuttuğunu göstereceğiz.

Şekil 6.13'e baktığımızda her  $i = 1, 2, \dots, 2g$  için  $h = C_1 C_2 \dots C_{2g+1}$  olmak üzere  $h(c_i) = c_{i+1}$  olduğu anlaşılıyor. Daha sonra  $c_{2g+1}$  eğrisine  $h^2$  uyguladığımızda  $c_1$  eğrisine götürüyor. Buradan  $x \in \{c_1, c_2, \dots, c_{2g+1}\}$  olmak üzere  $h^{2g+2}(x) = (x)$  olur. Yine Gerçek 6.2'den birbirleriyle hiç kesilmeyen basit kapalı  $x$  ve  $d_1, d_2$  eğrileri için  $h^{2g+2} g^{-1}(x) = x$  elde ederiz.

Şimdi geriye  $h^{2g+2} g^{-1}$  homeomorfizmasının  $e$  yayını (Şekil 6.10) koruduğunu göstermek kaldı ki bunu da Şekil 6.14'te gösteriyoruz. Burada  $e$  yayının herbir  $h$  dönüşümü altındaki görüntüsünü görüyoruz. Daha sonra  $D_1^{-1}$  ve  $D_2^{-1}$  uygulandığında tekrar aynı yayı elde ediyoruz. Sonuç olarak  $x \in \{c_1, c_2, \dots, c_{2g}, c_{2g+1}, e\}$  için  $h^{2g+2} g^{-1}(x) = (x)$  olduğunu göstermiş olduk. Buradan  $h^{2g+2} g^{-1}(x) \in Mod(D^2)$  olur. Alexander Önsav'ından  $h^{2g+2} D_1^{-1} D_2^{-1}(x) = id$  ve  $h^{2g+2} = D_1 D_2$  dir.  $\square$

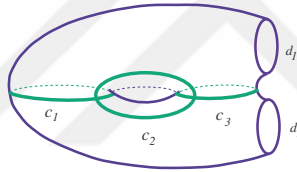
Şimdi zincir ilişkisinin özel durumları olan bir sınırlı tor ilişkisi ve iki sınırlı tor ilişkisinin tanımlarını aşağıda vereceğiz.



Şekil 6.15. Bir sınırlı tor yüzeyi

**Not 1:** Zincir ilişkisinin bir cinsli bir sınır bileşenli yüzeyde uygulanmasına, özel olarak **bir sınırlı tor ilişkisi** denir. Yani  $c_1, c_2$  eğrileri ve  $d$  yayı Şekil 6.15'teki gibi olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$(C_1 C_2)^6 = D$$



Şekil 6.16. İki sınırlı tor yüzeyi

**Not 2:** Zincir ilişkisinin bir cinsli iki sınır bileşenli yüzeye uygulanmasına ise **iki sınırlı tor ilişkisi** denir. Yani  $c_1, c_2, c_3$  eğrileri ve  $d_1, d_2$  yayları Şekil 6.16'daki gibi olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$(C_1 C_2 C_3)^4 = D_1 D_2$$



## 7. DEHN-LICKORISH TEOREMİ

Bir önceki bölümde kapalı, yönlendirilebilir yüzeylerin gönderim sınıf gruplarının en temel üreteçleri olan Dehn burgularını gördük. Bir yüzeyinin gönderim sınıf gruplarının üreteçleri üzerine ilk çalışmalar Dehn tarafından yapılmıştır (Dehn, 1938). Dehn, cins sayısı üç ve üçten büyük olan yüzeyler için gönderim sınıf gruplarının  $2g(g - 1)$  tane burğu tarafından üretildiğini göstermiştir. Bu burguların içinde yüzeyi ayıran ve yüzeyi ayırmayan eğriler etrafındaki burgular vardır. Dehn'in çalışmasından bağımsız olarak, Lickorish (1962) makalesinde kapalı, bağlantılı, yönlendirilebilir bir yüzeyde alınan herhangi bir homeomorfizmanın, Dehn burgularının çarpımına izotopik olduğunu göstermiştir. Biz de şimdi bu teoremi ve bunun ispatını vereceğiz.

**Teorem 7.1. Dehn-Lickorish Teoremi:**  $S$  herhangi bir yönlendirilmiş, tıkHz bir yüzey olsun.  $Mod(S)$  Dehn burguları tarafından üretilir.

*Kanıt.* Tümevarım ile ispatlayacağız;

$Cins(S)$  sayısı üzerinde tümevarım ile başlayalım.

$Cins(S) = 0$  için doğru olduğunu gösterelim.  $S$  yüzeyinin sınır sayısına  $n$  dersek,  $S$  yüzeyinin sınır sayısı üzerinde bir tümevarım daha yapmamız gerekecek.

**i)**  $n = 0$  için yüzeyimiz  $S^2$  yani küredir. Kürenin gönderim sınıf grubunu  $Mod(S^2) = \{id\}$  olduğunu biliyoruz. (Bakınız Örnek 5.2).

**ii)**  $n = 1$  için yüzeyimiz  $D^2$  'dir. Alexander Önsav'ından diskin gönderim sınıf grubu  $Mod(D^2) = \{id\}$ 'dir. (Bakınız Önsav 5.1).

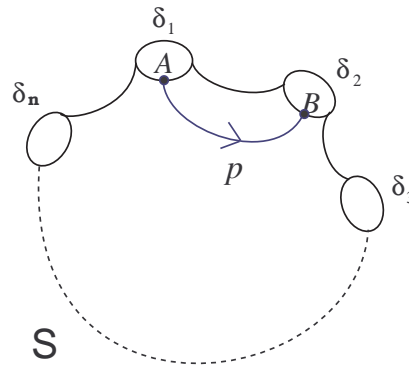
**iii)**  $n \geq 2$  için doğru olduğunu gösterelim.

$\delta_1, \delta_2$ ,  $S$  yüzeyinin iki sınır bileşeni olsun, bakınız Şekil 7.1.  $\delta_1$  üzerinde bir  $A$  noktası ve  $\delta_2$  üzerinde bir  $B$  noktası seçelim.  $p$ ,  $A$  noktasından  $B$  noktasına giden yönlendirilmiş bir yay olsun (Şekil 7.1 ve Şekil 7.2).

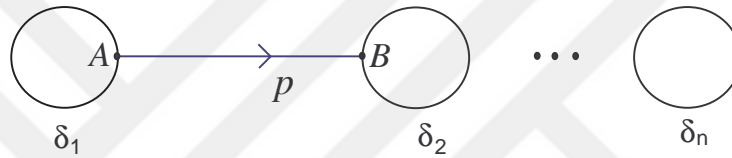
$\mathcal{T}$ ,  $Mod(S)$ 'in (varsa) Dehn burguları tarafından üretilen bir alt grubu ve  $f : S \rightarrow S$ 'e tanımlı,  $S$  yüzeyinin sınır noktalarını sabitleyen bir homeomorfizma olsun.

**İddia:**  $\mathcal{T}$  grubunun en az bir elemanı  $T$  vardır öyle ki  $T(f(p))$  yayı  $p$  yayına izotopiktir.

*Kanıt.*  $p$  yayının  $f$  homeomorfizması altında görüntüsüyle kesişim sayısına  $m$  diyelim. Yani  $m = |p \cap f(p)|$ 'dir. O zaman  $2 \leq m < \infty$  diyebiliriz. Şimdi de  $m$  üzerinde tümevarım ile iddiamızı ispatlayalım.



Şekil 7.1.  $n \geq 2$  için S yüzeyi



Şekil 7.2. S yüzeyinin sınır bileşenleri

$m=2$  için iki durum söz konusudur.

**Durum 1)**  $f(p)$  yayının  $p$  yayına göre  $A$  ve  $B$  noktalarında farklı yönlerde (aşağısında ve yukarısında) olması durumu: Bu durumda yine iki durum karşımıza çıkıyor. İki durumu da ayrı ayrı inceleyelim.

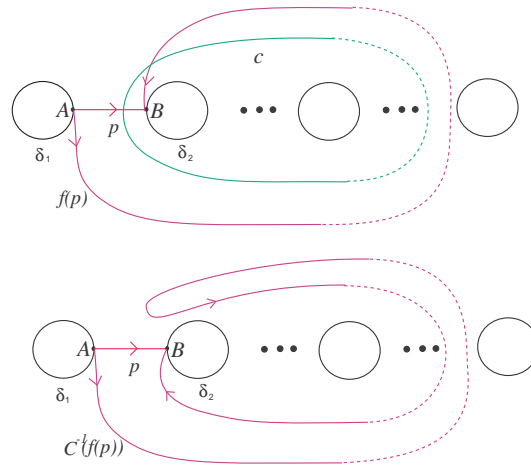
$c$  eğrisi Şekil 7.3'te görüldüğü gibi  $A$  noktasından geçtikten sonra başlayan,  $f(p)$  yayını takip eden ve  $f(p)$  yayını bir noktada kesen basit kapalı bir eğri olsun.

i)  $f(p)$  yayına  $c$  eğrisi boyunca sol Dehn burgusunu uyguladığımızda  $p$  yayına izotopik bir yay elde etmiş oluyoruz. Dolayısıyla  $T = C^{-1}$  için  $T(f(p)) \simeq p$  olur (Şekil 7.3).

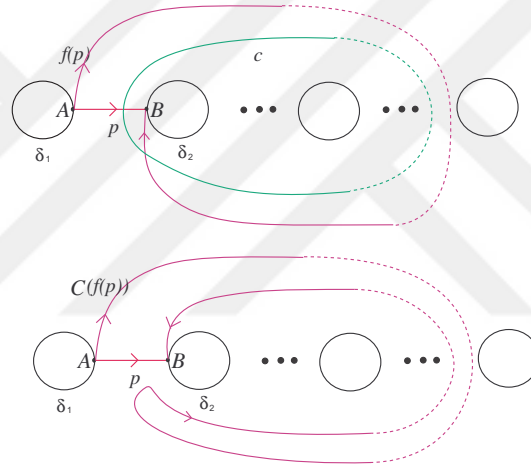
ii)  $f(p)$  yayına  $C$  Dehn burgusunu uyguladığımızda  $p$  yayına izotopik bir yay elde etmiş oluyoruz. Dolayısıyla bu defa  $T = C$  için  $T(f(p)) \simeq p$  elde etmiş oluruz (Şekil 7.4).

**Durum 2)**  $f(p)$  yayının  $p$  yayına göre  $A$  ve  $B$  noktalarında aynı tarafta olması durumu: Burada da yine iki durum karşımıza çıkıyor.

$S$  yüzeyinin sınır bileşeni  $\delta_1$ 'e paralel basit kapalı eğriye  $d$  diyelim (Şekil 7.5, Şekil 7.6).



Şekil 7.3. m=2 için Durum 1) i)

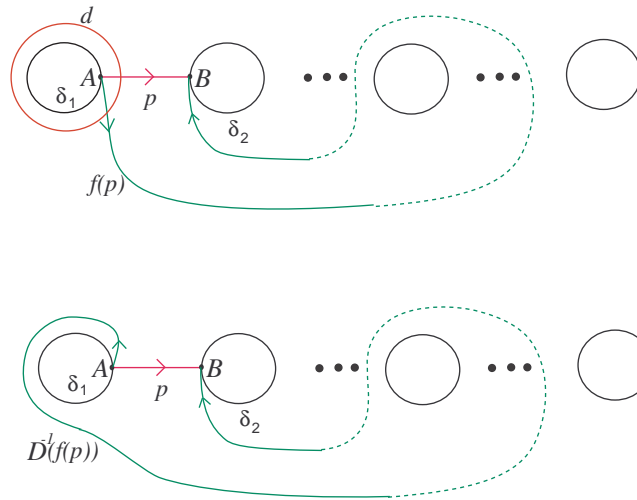


Şekil 7.4. m=2 için Durum 1) ii)

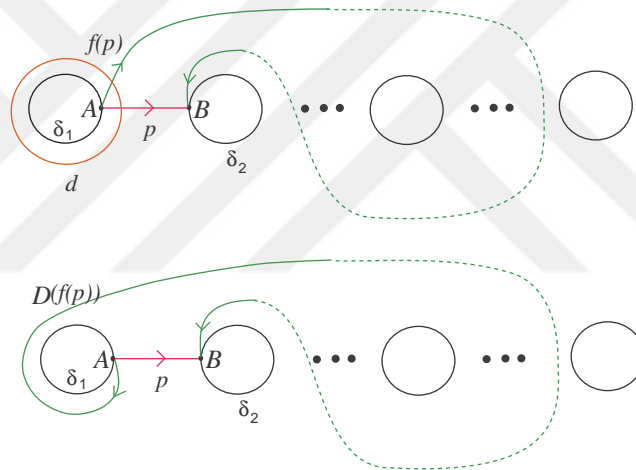
- i)  $f(p)$  yayına  $D^{-1}$  Dehn burgusunu uyguladığımızda (Şekil 7.5) m=2 için Durum 1)'in i) şikkını elde ediyoruz. Dolayısıyla iddiamızı bu durum için ispatlamış oluyoruz.
- ii) Bu durumda ise bu defa  $f(p)$  yayına  $D$  Dehn burgusunu uyguladığımızda (Şekil 7.6) m=2 için Durum 1)'in ii) şikkını elde ediyoruz. Böylece iddiamızı m=2 için ispatlamış olduk.

$m \geq 3$  için  $K$ ,  $A$  noktasından  $B$  noktasına giderken  $p$  ve  $f(p)$  yaylarının ilk kesişim noktası olsun (Şekil 7.7). Burada da yine iki durum söz konusudur.

**Durum 1)**  $f(p)$  yayının  $A$  noktasından çıkarken ve  $K$  noktasına ulaşırken,  $p$  yayının farklı yönlerinde olması durumu ( $p$  yayının aşağısında ve yukarısında olma durumu)(Şekil 7.7).



Şekil 7.5. m=2 için Durum 2) i)



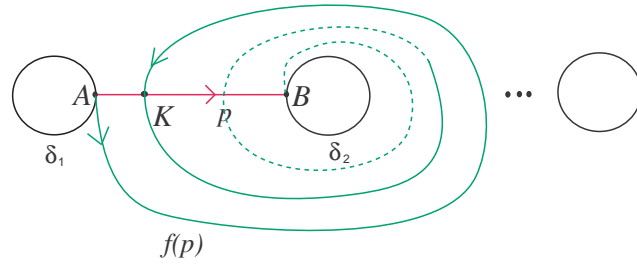
Şekil 7.6. m=2 için Durum 2) ii)

Bu durumda yine iki farklı yaklaşım karşımıza çıkıyor. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

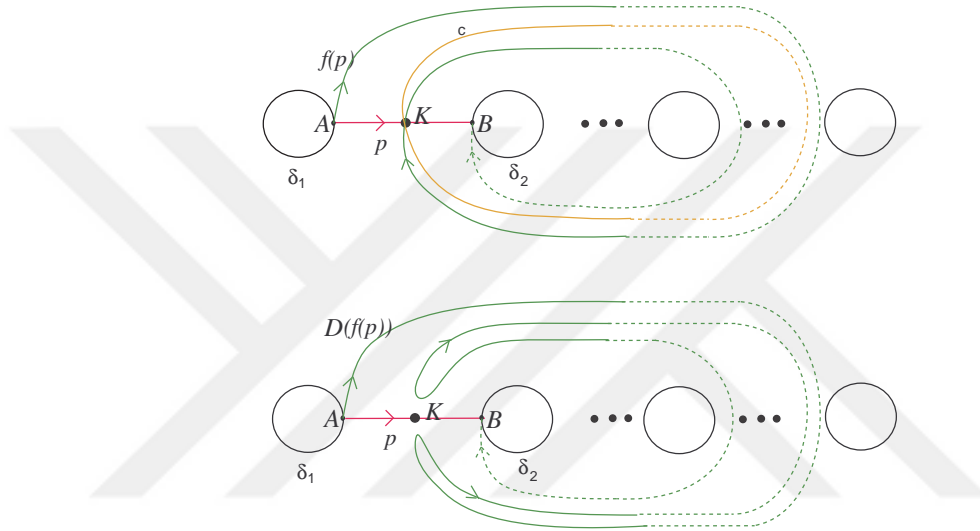
$c$  eğrisi,  $K$  noktasında başlayan,  $f(p)$  yayını takip eden ve  $f(p)$  yayını sadece  $K$  noktasında kesen, bariz olmayan basit kapalı bir eğri olsun (Şekil 7.8).

**i)**  $f(p)$  yayının başlangıçta  $p$  yayının yukarisından çıkması ve  $K$  noktasına  $p$  yayının aşağısından yaklaşması durumu:

$c$  eğrisi boyunca  $f(p)$  yayına pozitif Dehn burgusu uyguladığımızda (Şekil 7.8) kesişim sayısını bir azaltmış oluyor ve tümevarım varsayımından bu durum için ispatlamış oluruz.



Şekil 7.7.  $m \geq 3$  olma durumu



Şekil 7.8.  $m \geq 3$  için Durum 1) i)

ii)  $f(p)$  yayının  $A$  noktasında  $p$  yayının aşağısından çıkması ve  $K$  noktasında  $p$  yayının yukarisından yaklaşması durumu:

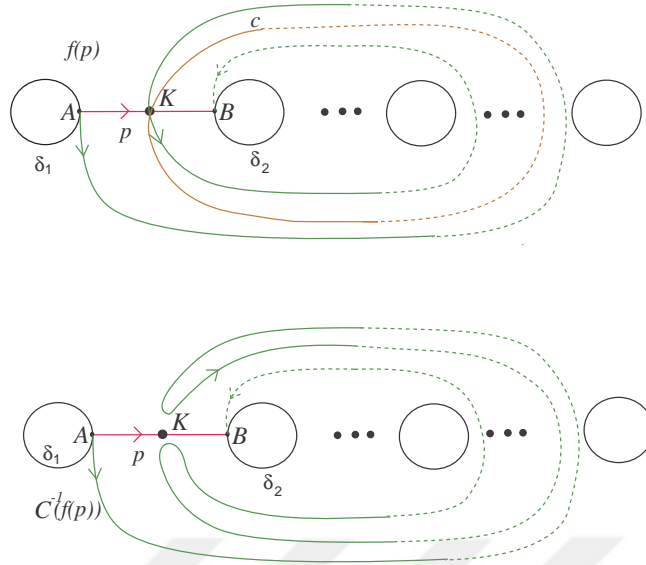
$f(p)$  yayına  $c$  eğrisi boyunca sol Dehn burgusu uyguladığımızda (Şekil 7.9) kesişim sayısını bir azaltmış oluyoruz. Dolayısıyla tümevarımdan bu durum için de ispatımızı tamamlamış oluyoruz.

**Durum 2)**  $f(p)$  yayının  $A$  noktasından çıktığında ve  $K$  noktasına yaklaştığında,  $p$  yayına göre aynı yönde olması durumu: Yine burada iki durum söz konusudur.

Yüzeyin sınır bileşeni olan  $\delta_1$ 'e paralel basit kapalı eğriye  $d$  diyelim.

i)  $f(p)$  yayının başlangıçta  $p$  yayına ve  $K$  noktasına yukarisından yaklaşması durumu:

$f(p)$  yayına  $D$  Dehn burgusunu uyguladığımızda (Şekil 7.10)  $m \geq 3$  için Durum 1'in ii) şikkını elde ediyoruz. Dolayısıyla bu durum için  $T(f(p)) \simeq p$  olacak şekilde bir  $T$  homeomorfizması buluruz.

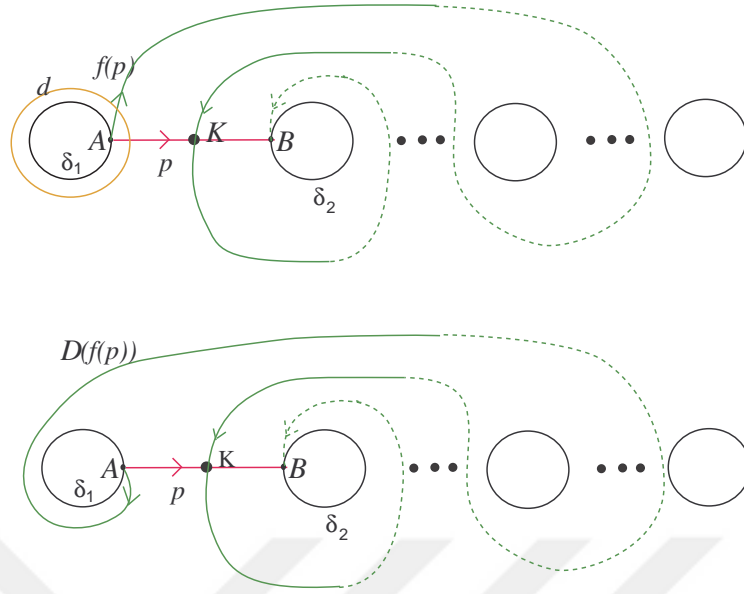


**Şekil 7.9.**  $m \geq 3$  için Durum 1) ii)

ii)  $f(p)$  yayının başlangıçta  $p$  yayına ve  $K$  noktasına aşağısından yaklaşması durumu: Bu son durumda da  $d$  eğrisi boyunca sol Dehn burgusu uyguladığımızda (Şekil 7.11)  $m \geq 3$  için Durum 1'in i) şikkını elde ediyoruz . Dolayısıyla  $m \geq 3$  için iddiamızı ispatlamış olduk.

□

Yukarıdaki iddianın ispatında gördük ki her durumda  $f(p)$  yayına uygulandığında  $p$  yayına izotopik gelecek şekilde bir  $T$  homeomorfizması bulunabiliyor. Hatta  $Tf$  homeomorfizmasının  $p$  yayını noktasal sabitlediğini varsayabiliriz.  $R$ ,  $n$  tane sınır bileşeni olan  $S$  küresini  $p$  yayı boyunca kesince elde ettiğimiz yüzey olsun. Dolayısıyla  $R$ ,  $n-1$  tane sınır bileşeni olan küredir ve  $Tf$  homeomorfizması,  $R$  yüzeyinin sınır noktalarını sabit tuttuğundan  $Tf \in Mod(R)$  olur. Tümevarım varsayımımızdan, sınır bileşen sayısı  $n-1$  olan  $R$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu Dehn burguları tarafından üretilir. Dolayısıyla  $Tf$  homeomorfizmasını  $Mod(R)$  grubundaki Dehn burgularını kullanarak yazabiliriz.  $Mod(R) \subseteq Mod(S)$  olduğundan  $Tf$  homeomorfizması,  $S$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun da bir elemanıdır ve  $T$  homeomorfizmasını  $Mod(S)$  grubunun elemanı olan Dehn burgularının çarpımı şeklinde yazılabilir.  $T$  homeomorfizması zaten tanımı gereği  $Mod(S)$  grubundaki Dehn burgularının çarpımı ile elde edildiğinden,  $f \in Mod(S)$  homeomorfizması da Dehn burgularının çarpımı ile yazılır.



**Şekil 7.10.**  $m \geq 3$  için Durum 2) i)

Böylece  $g = 0$  için ispatı tamamlamış olduk.

Şimdi  $g \geq 1$  için bakalım. İspatımızın bu bölümünde aşağıdaki önsava ihtiyacımız olacak.

**Önsav 7.1.**  $a$  ve  $b$ ,  $S$  yüzeyi üzerinde iki adet yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğri olsun. O zaman  $a$  eğrisini  $b$  eğrisine taşıyan bir **eğri zinciri** (zincirin tanımı için bakınız Tanım 6.2.) vardır.

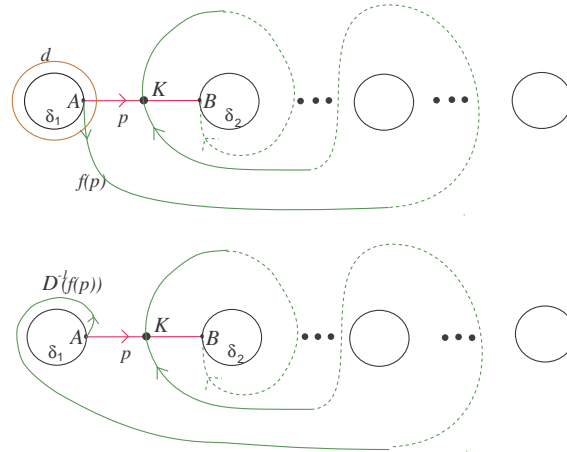
*Kanıt.*  $a$  ve  $b$ ,  $S$  yüzeyi üzerinde iki tane yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğri olsun.  $i(a, b) = m$  dersek,  $m$  sayısı üzerinde tümevarım ile ispatlayacağız.

$m = 0$  için iki durum söz konusudur:

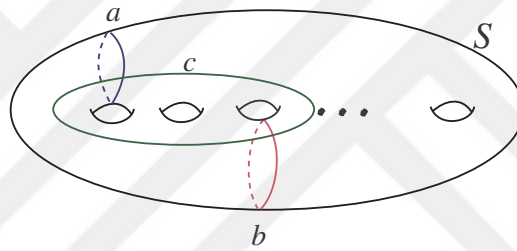
$a$  ve  $b$  eğrileri boyunca  $S$  yüzeyini kestiğimizde, yeni yüzeyin bağlantılı (Durum 1) ve bağlantısız (Durum 2) olma durumlarını incelemek gerekecektir.

**Durum 1)**  $S$  yüzeyini  $a, b$  eğrileri boyunca kesince yine bağlantılı bir yüzey elde etme durumu:

Bu durumda  $a, b$  ikilisini ne seçersek seçelim Şekil 7.12'deki  $a, b$  eğri çiftine taşıyabiliriz (Yüzeylerin Sınıflandırılması Teoreminden). Dolayısıyla Şekil 7.12'deki  $a, b$  eğri çifti için ispatlamamız yeterli olacaktır. Bu durumda ise Şekil 7.12'de gösterilen  $a, c, b$  eğri zincirini buluruz.



Şekil 7.11.  $m \geq 3$  için Durum 2) ii)



Şekil 7.12.  $a, c, b$  eğri zinciri

**Durum 2)**  $S$  yüzeyini  $a, b$  eğrileri boyunca kesince bağlantılı olmayan yüzey elde etme durumu:

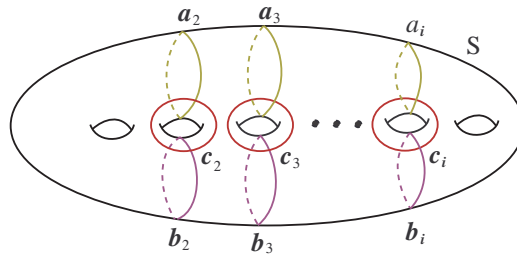
$a, b$  eğri çiftinin  $S$  yüzeyini ayırdığı yüzeylerin cins durumuna göre, Şekil 7.13'teki eğri çiftlerinden  $(a_i, b_i)$  birini seçeriz. Şekil 7.13'te değişik cins sayılarına göre her durum için  $a_i, c_i, b_i$  eğri zinciri verilmiştir.

$m = 1$  için  $a, b$  eğri çifti zaten bir zincir oluşturmaktadır.

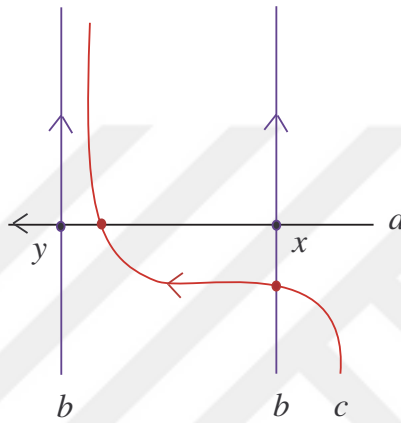
$m \geq 2$  için  $a$  ve  $b$  eğrilerine yön verelim. Bu durumda iki durum söz konusudur. **i)**  $a$  eğrisi üzerinde ard arda bulunan,  $a$  ile  $b$  eğrilerinin kesişimleri  $x$  ve  $y$  noktalarında,  $b$  eğrisinin  $a$  eğrisine göre yönlendirilmesi aynı olsun (Şekil 7.14).

$c$  eğrisi Şekil 7.14'teki gibi  $b$  eğrisine paralel başlayan, ancak daha sonra  $b$  eğrisini bir noktada kesip,  $a$  eğrisini ise  $m - 1$  noktada keserek yine  $b$  eğrisine paralel olarak kendi başlangıç noktasına dönen, yüzeyi ayırmayan basit kapalı bir eğri olsun. Bu durumda  $i(a, c) \leq i(a, b)$  ve  $i(b, c) = 1$  olur. Dolayısıyla tümevarım varsayımından





Şekil 7.13.  $a_i, c_i, b_i$  eğri zincirleri



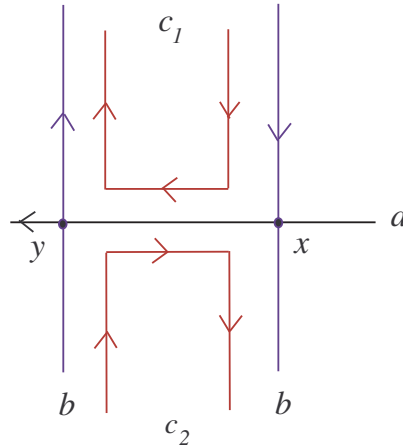
Şekil 7.14.  $m \geq 2$  için i)

$i(a, c) \leq i(a, b)$  olduğundan  $a$  eğrisini  $c$  eğrisine taşıyan bir zincir buluruz.  $i(b, c) = 1$  olduğundan  $c, b$  zinciri ile birleştirirsek,  $a$  eğrisini  $b$  eğrisine taşıyan bir zincir bulmuş oluruz.

ii)  $a$  eğrisi üzerinde ard arda bulunan,  $a$  ile  $b$  eğrilerinin kesişimleri  $x$  ve  $y$  noktalarında,  $b$  eğrisinin  $a$  eğrisine göre yönlendirilmesi birbirinin zıttı olsun (Şekil 7.15).

Bu durumda Şekil 7.15'te gösterildiği gibi,  $b$  eğrisine paralel başlayan,  $a$  eğrisini  $x$  ve  $y$  noktalarında kesmeden yine  $b$  eğrisine paralel devam eden  $c_1$  ve  $c_2$  basit kapalı eğrilerini bulabiliriz. Bunlardan biri ( $c_1$  veya  $c_2$ ) yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğri olmak zorundadır (ki buna  $c_1$  diyelim).  $i(a, c_1) \leq i(a, b) = m$  olduğundan  $a$  eğrisini  $c_1$  eğrisine taşıyan bir zincir vardır.  $c_1$  eğrisi  $b$  eğrisi ile hiç kesişmediğinden yani  $i(c_1, b) = 0$  olduğundan  $c_1$  eğrisini  $b$  eğrisine taşıyan bir zincir vardır. Sonuç olarak  $a$  eğrisini  $b$  eğrisine taşıyan bir zincir bulmuş oluruz.

□



**Şekil 7.15.**  $m \geq 2$  için ii)

Yönlendirilebilir, kompakt, cins sayısı  $g \geq 1$  ve  $n$  adet sınır bileşeni olan  $S$  yüzeyinde herhangi bir  $f \in Mod(S)$  homeomorfizması alalım. "a",  $S$  yüzeyinde yüzeyi ayırmayan basit kapalı bir eğri olsun.  $f(a)$  eğrisinin de yüzeyi ayırmayan basit kapalı bir eğri olduğunu biliyoruz (Yüzeylerin Sınıflandırılması Teoreminden).

O zaman Önsav 7.1'den  $a$  eğrisini  $f(a)$  eğrisine taşıyan  $a = a_0, a_1, \dots, a_n = f(a)$  eğri zinciri vardır. Dolayısıyla öyle bir  $T = A_1 A_0 A_2 A_1 A_3 A_2 \dots A_{n-1} A_{n-2} A_n A_{n-1}$  vardır ki  $T(f(a)) \simeq a_0 = a'$  dir, yani  $T$  Dehn burgularının çarpımıdır.  $Tf$  homeomorfizmasını  $a$  eğrisine uyguladığımızda  $a$  eğrisinin ters yönlendirilmiş olanını elde etme olasılığımız da vardır. Yani  $T(f(a)) \simeq a^-$  elde edebiliriz. Bu durumda  $Tof$  homeomorfizmasına  $A_1 A_0 A_0 A_1$  homeomorfizmasını uygularsak yönünü düzeltmiş oluruz. Dolayısıyla  $a$  eğrisinin aynı yönlendirilmiş durumunu elde ederiz.

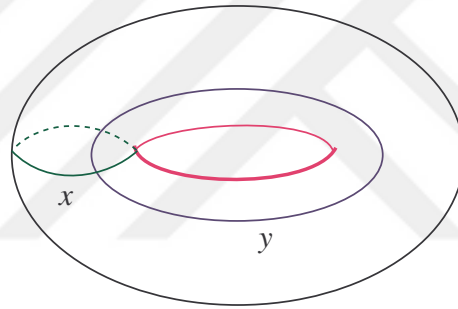
$T(f(a))$ 'nın  $a$  eğrisini noktasal olarak sabitlediğini varsayabiliriz. Daha sonra  $S$  yüzeyini  $a$  eğrisi boyunca kestiğimizde, cinsi  $g - 1$  ve sınır bileşen sayısı  $b + 2$  olan kompakt, yönlendirilebilir bir yüzey elde ederiz. Bu yüzeye  $R$  dersek,  $Tf : R \rightarrow R$  sınır noktalarını sabit tutan bir homeomorfizma ve  $Tf \in Mod(R)$  olur. Tümevarım varsayımımızdan  $Tf$ ,  $R$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun elemanı Dehn burgularının çarpımından oluşur.  $Tf \in Mod(R) \subseteq Mod(S)$  olduğundan ve  $T$  homeomorfizması da Dehn burgularının çarpımından oluştuğundan,  $f$  homeomorfizması da  $S$  yüzeyindeki eğriler boyunca uygulanan Dehn burguları tarafından üretilmektedir.

□

Yukarıdaki teoremde bir yüzeyin gönderim sınıf grubunun o yüzeydeki eğriler etrafındaki Dehn burguları tarafından üretildiğini gördük. Ancak bu eğriler yüzeyi ayıran ve yüzeyi ayırmayan eğrilerdir. Bir sonraki teoremde Teorem 7.2 'de sadece yüzeyi ayırmayan eğrilerin gönderim sınıf grubunu üretmeye yeterli olduğunu göstereceğiz.

**Teorem 7.2.** Cins sayısı  $g \geq 2$  ve  $g = 1, b = 0, 1$  için  $\Sigma_g^b$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu,  $Mod(\Sigma_g^b)$ , yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğriler etrafındaki Dehn burguları tarafından üretilir.

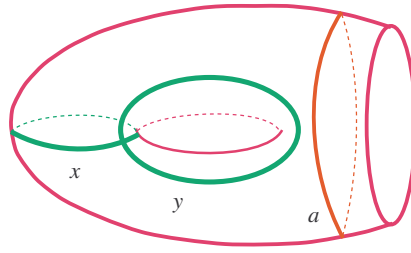
*Kanıt.*  $g = 1$  ve  $b = 0$  yüzeyde, yüzeyi ayıran basit kapalı eğri yoktur ve torus yüzeyinin gönderim sınıf grubu yüzeyi ayırmayan  $x$  ve  $y$  basit kapalı eğrileri tarafından üretilir (Şekil 7.16).



**Şekil 7.16.** Torus

$g = 1$  ve  $b = 1$  yüzeyi bir sınır bileşeni olan tor yüzeyidir. Burada yüzeyi ayıran bir tane basit kapalı eğrisi vardır o da torus yüzeyinin sınır bileşeni boyunca giden  $a$  basit kapalı eğrisidir (Şekil 7.17). Bir sınırlı tor ilişkisinden (Not 1)  $a$  basit kapalı eğrisi etrafındaki Dehn burgusu yüzeyi ayırmayan  $x$  ve  $y$  basit kapalı eğrileri etrafındaki Dehn burgularının çarpımı şeklinde yazılabilir. Yani  $(XY)^6 = A$  olur. Dolayısıyla yüzeyi ayıran  $a$  basit kapalı eğrisi etrafındaki Dehn burgusunu yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğriler etrafındaki Dehn burgularının çarpımı şeklinde yazabildiğimizden cins bir yüzey için ispat tamamlanmış olur.

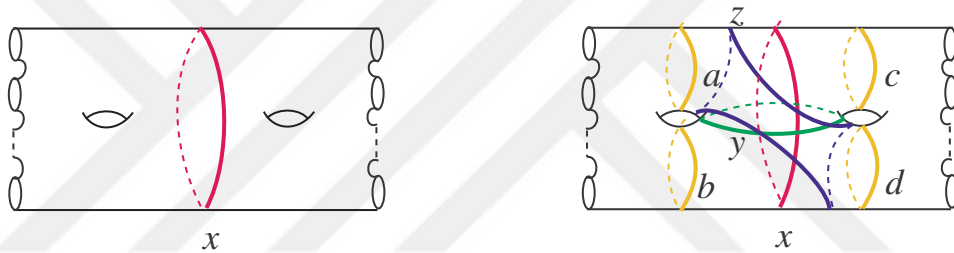
$g \geq 2$  için  $\Sigma_g^b$  yüzeyinde herhangi bir yüzeyi ayıran basit kapalı bir eğri  $x$ 'i alırsak,  $x$  etrafındaki Dehn burgusunun yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğriler etrafındaki Dehn burgularından elde edilebileceğini göstereceğiz. Burada iki durum söz konusudur. İki



Şekil 7.17. Bir sınırlı torus

durum için de yüzeylerde dört sınır bileşeni olan küreyi bulup lantern ilişkisini kullanarak  $x$  eğrisi etrafındaki Dehn burgusunu yüzeyi ayırmayan eğriler etrafındaki Dehn burguları ile yazmaya çalışacağız. Şimdi bu durumları ayrı ayrı inceleyelim:

**Durum 1)**  $a$  eğrisinin ayırdığı iki yüzeyin de cins bir yüzey olma durumu:

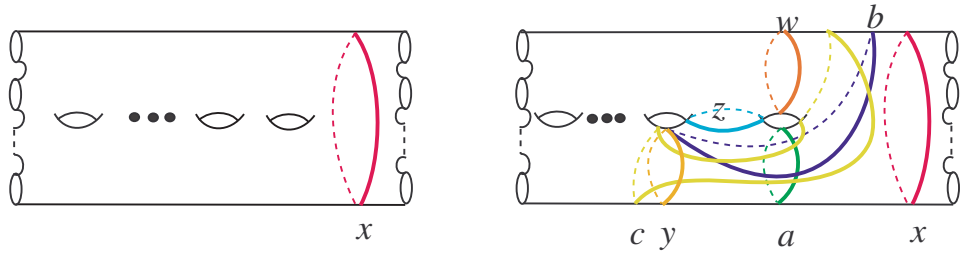


Şekil 7.18. Durum 1

$x$  eğrisinin ayırdığı yüzeylerde Şekil 7.18'de olduğu gibi  $a, b, c, d$  birbirini kesmeyen basit kapalı eğrilerini alıp bu eğriler boyunca yüzeyimizi kesersek, dört sınır bileşeni olan bir küre elde ederiz.  $y$  ve  $z$  yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğrileri için lantern ilişkisinden  $ABCD = XYZ$ 'dir. Bu durumda  $X = ABCDY^{-1}Z^{-1}$  olarak yazabiliriz. Dolayısıyla  $x$  etrafındaki Dehn burgusunu yüzeyi ayırmayan  $a, b, c, d, y$  ve  $z$  basit kapalı eğriler etrafındaki Dehn burgularının çarpımı şeklinde yazabiliriz.

**Durum 2)**  $x$  eğrisinin ayırdığı yüzeylerden bir tanesinin cins sayısının iki veya ikiden büyük olma durumu:

Sınır bileşeni dört olan bir küre elde etmek için yüzeyimizi Şekil 7.19'da olduğu gibi  $w, z$  ve  $y$  yüzeyi ayırmayan ve birbirini kesmeyen basit kapalı eğriler ve  $x$  eğrisi boyunca kesmemiz gerekir. Burada,  $b$  ve  $c$  yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğrileri için lantern ilişkisinden  $WZYX = ABC$ 'dir. Bu durumda  $X = ABCW^{-1}Z^{-1}Y^{-1}$  olarak yazabiliriz. Dolayısıyla  $x$  etrafındaki Dehn burgusunu yüzeyi ayırmayan  $w, z, y, a, b$  ve



**Şekil 7.19.** Durum 2

$c$  yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğriler etrafındaki Dehn burgularının çarpımı şeklinde yazabiliriz.



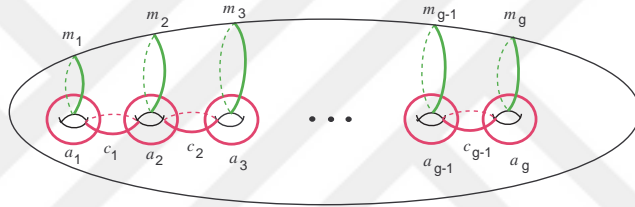
□

## 8. DİĞER ÜRETEÇLER

### 8.1. Lickorish Üreteçleri

#### Tanım 8.1. Lickorish Üreteçleri:

Lickorish (1964) makalesinde, kapalı, yönlendirilmiş bir yüzeyin gönderim sınıf grubunu üretmek için Şekil 8.1’de verilen eğrilerin yeterli olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla  $a_1, a_2, \dots, a_g, c_1, c_2, \dots, c_{g-1}, m_1, m_2, \dots, m_g$  basit, kapalı eğrileri etrafındaki  $A_1, A_2, \dots, A_g, C_1, C_2, \dots, C_{g-1}, M_1, M_2, \dots, M_g$  Dehn burgularına **Lickorish üreteçleri** diyeceğiz. Bu üreteçler  $3g - 1$  tanedir. Bir sonraki bölümde göreceğimiz gibi bu sayı minimum değildir.



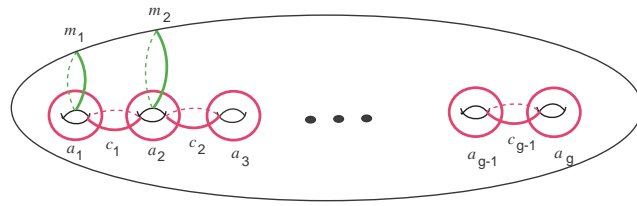
Şekil 8.1. Lickorish üreteçleri

### 8.2. Humphries Üreteçleri

Humphries (1979) çalışmasında  $Mod(\Sigma_g)$ 'yi üretmek için, Lickorish üreteçlerinden  $m_3, m_4, \dots, m_g$  eğrileri (Şekil 8.1) etrafındaki  $M_3, M_4, \dots, M_g$  Dehn burgularını çıkarmış ve  $A_1, A_2, \dots, A_g, C_1, C_2, \dots, C_{g-2}, C_{g-1}, M_1, M_2$  üreteçlerinin yeterli olduğunu göstermiştir.

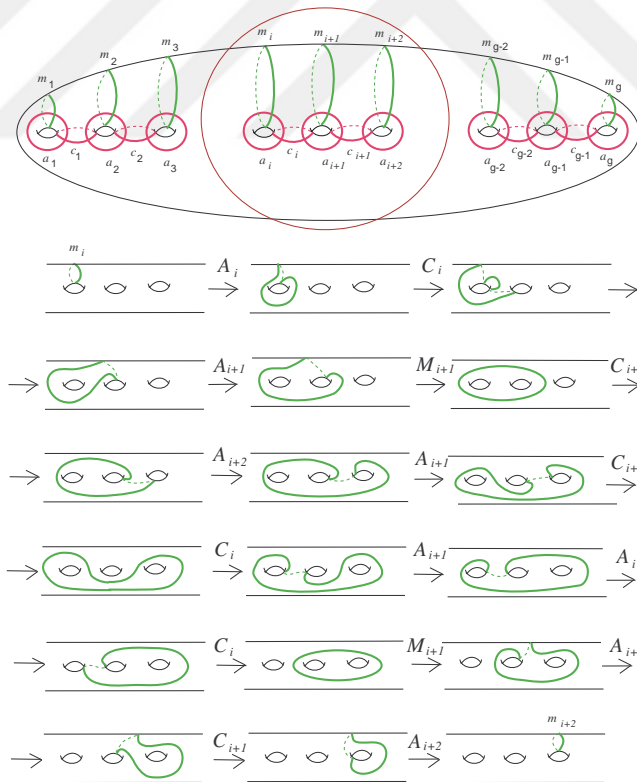
**Teorem 8.1. Humphries üreteçleri:** Cins sayısı  $g$  olan kapalı yönlendirilmiş  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu  $Mod(\Sigma_g)$ 'ni Şekil 8.2'deki  $a_1, a_2, \dots, a_g, c_1, c_2, \dots, c_{g-1}, m_1, m_2$  eğrileri etrafındaki  $A_1, A_2, \dots, A_g, C_1, C_2, \dots, C_{g-2}, C_{g-1}, M_1, M_2$  Dehn burguları üretir.

*Kanıt.*  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun Şekil 8.1'deki  $3g - 1$  tane eğrinin etrafındaki Dehn burgusu tarafından üretildiğini biliyoruz. Şimdi biz  $Mod(\Sigma_g)$ 'yi üretmek için  $M_3, M_4, \dots, M_{g-1}, M_g$  Dehn burgularına gerek olmayacağını göstereceğiz. Yani bu



Şekil 8.2. Humphries üreteçleri

Dehn burgularını diğerlerinden elde edeceğiz. Yüzeylerin sınıflandırılması teoreminin  $m_i$  eğrisini  $m_{i+2}$  eğrisine taşıyan bir homeomorfizma vardır. Bu homeomorfizmanın ne olduğunu Şekil 8.3'ten takip ederek açıkça yazabiliriz. Her  $1 \leq i \leq g - 2$  için  $h_i = A_{i+2}C_{i+1}A_{i+1}M_{i+1}C_iA_iA_{i+1}C_iC_{i+1}A_{i+1}A_{i+2}C_{i+1}M_{i+1}A_{i+1}C_iA_i$  homeomorfizmasını  $m_i$  eğrisine uygularsak  $m_{i+2}$  eğrisini elde ederiz. Dolayısıyla  $m_{i+2}$ 'yi elde etmek için  $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, C_i, C_{i+1}$  ve  $M_{i+1}$  Dehn burgularını kullanmamız yeterlidir. Bunu her  $i$  için uyguladığımızda Humphries üreteçlerini elde etmiş oluruz.



Şekil 8.3. h homeomorfizması

Humphries bu üreteçlerin sayısının  $2g + 1$ 'den daha küçük olamayacağını aynı makalede ispatlamıştır (Humphries, 1979). Yani  $2g + 1$ 'den az Dehn burgusu ile  $\Sigma_g$  yüzeyi-

nin gönderim sınıf grubu üretilememektedir.

□





## 9. MİNİMUM ÜRETEÇ SAYILARI

Bir önceki bölümde kapalı, yönlendirilebilir, bağlantılı  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun  $Mod(\Sigma_g)$ , sonlu tane Dehn burgusu tarafından üretildiğini Teorem 8.1'de gösterdik. Daha sonra  $Mod(\Sigma_g)$  grubunu üretmek için bunlardan yalnızca yüzeyi ayırmayan eğriler etrafındaki Dehn burgularının yeterli olduğunu gösterdik. Hatta Lickorish (1964) makalesinde  $3g - 1$  tane yüzeyi ayırmayan eğri etrafındaki Dehn burgusunun,  $Mod(\Sigma_g)$  grubunu ürettiğini göstermiştir. Lickorish üreteçleri için, bakınız Şekil 8.1. Daha sonra Humphries (1979) makalesinde,  $Mod(\Sigma_g)$ 'yi üretmek için  $2g + 1$  tane yüzeyi ayırmayan eğri etrafındaki Dehn burgusunun yeterli olduğunu ve bu sayının minimum olduğunu ispatlamıştır. Şimdi bu bölümde gönderim sınıf gruplarının Dehn burgularından farklı üreteçlerini göstereceğiz. Dikkat edersek Dehn burgularının mertebesi sonsuz iken biz aşağıdaki teoremden gönderim sınıf gruplarının üreteçlerine mertebesi sonlu elemanlar ekleyeceğiz.

Aşağıdaki Teorem 9.1'in ispatı Mustafa Korkmaz'ın "Minimal generating sets for the mapping class group of a surface" (Korkmaz, 2012) isimli makalesinde Teorem 3.6'nın açıklamasından alınmıştır. Humphries üreteçlerinin  $Mod(\Sigma_g) = \langle A_1, A_2, \dots, A_{2g}, B \rangle$  olduğunu biliyoruz (Şekil 9.1).  $\Sigma_g$  yüzeyinin Şekil 9.2'deki modelini ele alalım. "R" dönüşümü  $\Sigma_g$  yüzeyini saatin tersi yönünde  $2\pi/g$  kadar döndüren homeomorfizma olsun.  $S$  ise mertebesi  $4g + 2$  olan ve  $A_{2g}A_{2g-1}\dots A_2A_1$  çarpımı ile verilen homeomorfizması olsun.

**Teorem 9.1.** Kapalı, yönlendirilmiş  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu aşağıdaki üreteçler tarafından üretilir.

- a)  $\langle R, A_1, A_2, A_3 \rangle$
- b)  $\langle R, A_1, A_1A_2A_3 \rangle$
- c)  $\langle S, B, A_1 \rangle$ .

*Kanıt.* a)

$G; R, A_1, A_2$  ve  $A_3$  elemanlarının ürettiği grup olsun. Yani  $G = \langle R, A_1, A_2, A_3 \rangle$  olsun.  $G \leq Mod(\Sigma_g)$  olduğu açıktır. Şimdi  $G = Mod(\Sigma_g)$  olduğunu göstereceğiz. Bunun için de Gerçek 6.1'den ve Teorem 8.1'den yararlanacağız.

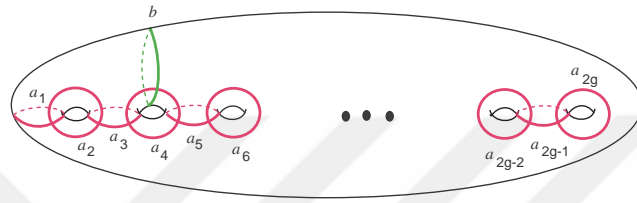
$R(a_1) = b$  olduğundan Gerçek 6.1'den  $RA_1R^{-1} = B$ 'dir.  $RA_1R^{-1} \in G$  olduğundan

$B \in G$  olur.

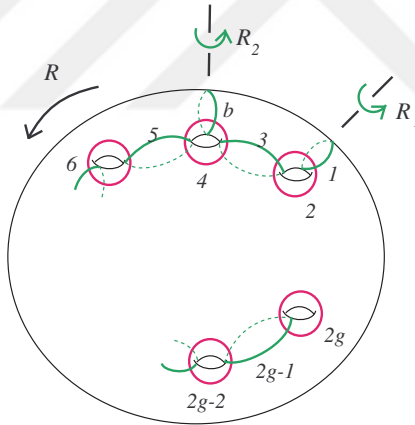
Benzer şekilde her  $1 \leq k \leq g - 1$  için  $R^k(a_2) = a_{2k+2}$  olduğundan Gerçek 6.1'den  $A_{2k+2} \in G$  olur.

Yine benzer şekilde her  $1 \leq l \leq g - 2$  için  $R^l(a_3) = a_{2l+3}$  olduğundan Gerçek 6.1'den  $A_{2l+3} \in G$  olur.

Yani  $R, A_1, A_2$  ve  $A_3$  homeomorfizmaları ile bütün Humphries üreteçlerini elde etmiş olduk. Dolayısıyla  $G = \langle R, A_1, A_2, A_3 \rangle = \text{Mod}(\Sigma_g)$ 'dir.



Şekil 9.1. Humphries eğrileri



Şekil 9.2.  $\Sigma_g$  yüzeyinin dairesel modeli

**b)** a şikkından  $\text{Mod}(\Sigma_g)$ 'yi üretmek için  $\langle R, A_1, A_2, A_3 \rangle$  üreteçlerinin yeterli olduğunu biliyoruz. Şimdi  $A_2$  ve  $A_3$  homeomorfizmalarını yalnızca  $R, A_1$  ve  $A_1A_2A_3$  homeomorfizmalarını kullanarak elde etmeye çalışacağız.

$$A_1A_2A_3(a_1) = a_2 \text{ olduğundan,}$$

$$(A_1A_2A_3)A_1(A_1A_2A_3)^{-1} = A_2 \text{ elde ederiz.}$$

Yani  $A_1$  ve  $A_1A_2A_3$  homeomorfizmaları varsa  $A_2$  homeomorfizmasını elde ederiz. Daha sonra

$$A_1A_2A_3(a_2) = a_3 \text{ olduğundan,}$$

$$(A_1A_2A_3)A_2(A_1A_2A_3)^{-1} = A_3 \text{ elde etmiş oluruz.}$$

Dolayısıyla farklı bir üreteç kümesi olan  $\langle R, A_1, A_1A_2A_3 \rangle$  bulmuş olduk.

c)  $\langle S, B, A_1 \rangle$

Her  $1 \leq i \leq 2g-1$  için  $S^{-1}(a_i) = a_{i+1}$  olur. O zaman Gerçek 6.1'den  $S^{-1}A_iS = A_{i+1}$  olur. Yani  $S$  ve  $A_1$  homeomorfizmalarından bütün  $A_i$  homeomorfizmalarını elde ederiz. Dolayısıyla  $\langle S, B, A_1 \rangle$  kümesiyle tüm Humphries üreteçlerini elde etmiş oluruz.  $\square$

Son olarak Teorem 9.1'in c) kısmında  $\Sigma_g$ 'nin gönderim sınıf grubunun üç elemanla üretildiğini gösterdik. Wajnryb (1996), aşağıdaki teoreminde bu sayıyı daha da düşürerek iki adet elemanın gönderim sınıf grubunu üretmek için yeterli olduğunu göstermiştir.

**Teorem 9.2. (Wajnryb, 1996):**  $g \geq 3$  için kapalı, yönlendirilmiş  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu  $S$  ve  $B_{g-1}B_g^{-1}$  elemanları tarafından üretilir.

$S$  homeomorfizmasının mertebesi  $4g+2$  ve  $B_{g-1}B_g^{-1}$  homeomorfizmasının mertebesi sonsuzdur. Bu teoremin  $g=1$  ve  $g=2$  için kısmen doğru olduğunu söyleyebiliriz. En azından bu durumlar için gönderim sınıf grupları iki elemanla üretilir.

$g=1$  için  $\Sigma_g$  torus yüzeyidir ve biliyoruz ki  $Mod(\Sigma_g) \cong SL_2\mathbb{Z} = \langle A_1, A_2 \rangle$ 'dir.

$g=2$  için  $Mod(\Sigma_g) = \langle A_1, A_5A_4A_3A_2A_1 \rangle$ 'dir.

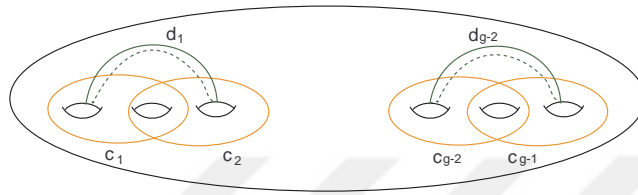
Yani cins sayısı  $g=1$  ve  $g=2$  için, Wajnryb'in verdiği üreteç kümesi çalışmasında gönderim sınıf grubunun iki eleman tarafından üretildiğini söyleyebiliriz. Korkmaz (2005) makalesinde, Wajnryb'in çalışmasını bir adım ileri götürerek  $Mod(\Sigma)$ 'nin  $S$  ve  $B$  tarafından üretildiğini göstermiştir. Birinci elemanları aynı, ikinci üretici Korkmaz'ın daha basit,  $b$  eğrisi (Şekil 9.1) boyunca Dehn burgusudur. İki teoremde de  $Mod(\Sigma)$ 'nin iki elemanla üretildiği gösterilmiş. Birinci elemanları mertebesi  $4g+2$  olan  $S$  homeomorfizması, ikinci eleman Wajnryb'de  $B_{g-1}B_g^{-1}$  çarpımı iken Korkmaz'da ise yalnızca  $B$  Dehn burgusudur.

**Teorem 9.3. (Korkmaz, 2005):**  $g \geq 2$  için kapalı yönlendirilmiş  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu  $S$  ve  $B$  tarafından üretilir.

*Kanıt.*  $\Gamma$ ,  $B$  ve  $S$  elemanları tarafından üretilen  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin bir alt grubu olsun. Yani,  $\Gamma = \langle B, S \rangle$ 'dir. Şimdi  $Mod(\Sigma_g) = \Gamma$  olduğunu göstereceğiz.

Bu ispatta bize yardımcı olacak bir önsavdan bahsedeceğiz.

**Önsav 9.1.**  $\Sigma_g$  yüzeyindeki, Şekil 9.3'teki  $c_1, c_2, \dots, c_{g-1}$  ve  $d_1, d_2, \dots, d_{g-2}$  basit kapalı eğrilerini alalım. Bunlar etrafındaki Dehn burguları  $C_1, C_2, \dots, C_{g-1}$  ve  $D_1, D_2, \dots, D_{g-2}$ ,  $\Gamma = \langle B, S \rangle$  grubunda yer alır.



**Şekil 9.3.**  $c_i$  ve  $d_j$  eğrileri

*Kanıt.*  $S^{-1}$  homeomorfizması,

- $b$  eğrisini  $c_1$  eğrisine taşır. Dolayısıyla  $S^{-1}(b) = c_1$ 'dir. Gerçek 6.1'den  $S^{-1}BS = C_1$  olur.  $S, B \in \Gamma$  olduğundan  $C_1 \in \Gamma$  olur.
- $c_1$  eğrisini  $d_1$  eğrisine taşır.  $S^{-1}(c_1) = d_1$  olduğundan Gerçek 6.1'den  $S^{-1}C_1S = D_1$  olur.  $S, C_1 \in \Gamma$  olduğundan  $D_1 \in \Gamma$  olur.
- $d_1$  eğrisini  $c_2$  eğrisine taşır.  $S^{-1}(d_1) = c_2$  olduğundan Gerçek 6.1'den  $S^{-1}D_1S = C_2$  olur.  $S, D_1 \in \Gamma$  olduğundan  $C_2 \in \Gamma$  olur.
- Benzer şekilde her  $1 \leq i \leq g-2$  için  $S^{-1}(c_i) = d_i$  ve  $S^{-1}(d_i) = c_{i+1}$  olduğundan tüm  $C_1, C_2, \dots, C_{g-1}, D_1, D_2, \dots, D_{g-2}$  Dehn burgularının  $\Gamma$  grubuna ait olduğunu göstermiş oluruz. Böylece önsavı kanıtlamış olduk.

□

Teorem 9.3'ün ispatına devam edersek;  $S(a_i) = a_{i-1}$  ve Gerçek 6.1'den  $SA_iS^{-1} = A_{i-1}$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla  $S \in \Gamma$  ve  $A_i \in \Gamma$ 'dir ancak ve ancak  $A_{i-1} \in \Gamma$  ise, ispatımızı tamamlamak için bir tane  $A_j \in \Gamma$  olduğunu göstermemiz yeterlidir. (Cins sayısının tek ve çift olma durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz.) Tüm  $A_i \in \Gamma$  ve  $B \in \Gamma$  olduğundan  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin Humphries tarafından gösterilen tüm üreteçleri  $\Gamma$ 'da yer alır. Yani,  $\Gamma = Mod(\Sigma_g)$ 'dir.

- $g$  tek sayı ise;  $A_3 \in \Gamma$  olduğunu göstereceğiz.

$$F(b) = C_2 D_1 B D_3^{-1} C_4^{-1} D_5^{-1} C_6^{-1} \dots D_{g-2}^{-1} C_{g-1}^{-1} S(b) = a_3$$

Önsav 11.'den  $C_2, D_1, B, D_3^{-1} C_4^{-1} D_5^{-1} C_6^{-1} \dots D_{g-2}^{-1} C_{g-1}^{-1}, S \in \Gamma$  olduğundan  $A_3 \in \Gamma$  elde ederiz.

- $g$  çift sayı ise;  $A_4 \in \Gamma$  olduğunu göstereceğiz.

$$F(b) = B D_2^{-1} C_3^{-1} D_4^{-1} C_5^{-1} \dots C_{g-2}^{-1} D_{g-1}^{-1} S(b) = a_4$$

Yine Önsav 11.'den  $C_3, C_2, C_1, D_2, D_1, B, S \in \Gamma$  olduğundan  $A_4 \in \Gamma$  elde ederiz.

□

En son teoremden gönderim sınıf gruplarının üreteçlerinden birinin mertebesi sonlu ve diğerinin mertebesi sonsuz olan iki elemandan oluştuğunu gösterdik.

## 10. SONLU MERTEBEYE SAHİP ÜRETEÇLER

Önceki bölümlerde bir yüzeyin gönderim sınıf gruplarının üreteçlerini incelemeye başladık. Dehn (1938) çalışmasında,  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun burgular tarafından üretildiğini göstermiştir. Daha sonra Lickorish (1964) makalesinde gönderim sınıf gruplarının  $3g - 1$  tane yüzeyi ayırmayan eğri etrafındaki Dehn burgusu tarafından üretildiğini bulmuştur (Şekil 8.1). Son olarak Humphries  $2g + 1$  tane Dehn burgusunun (Şekil 9.1) yeterli olduğunu ve bu sayının minimum olduğunu ispatlamıştır. Wajnryb Teorem 9.2'de,  $g \geq 3$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun  $S$  ve  $B_{g-1}B_g^{-1}$  tarafından üretildiğini göstermiştir.  $S$  homeomorfizmasının mertebesi  $4g + 2$  ve  $B_{g-1}B_g^{-1}$  homeomorfizmasının mertebesi sonsuzdur. Korkmaz Teorem 9.3'te,  $g \geq 2$  için kapalı, yönlendirilmiş  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun mertebesi  $4g + 2$  olan  $S$  elemanı ve mertebesi sonsuz olan  $B$  elemanı tarafından üretildiğini ispatlamıştır. Bu bölüme kadar üreteçlerimizde bir tane de olsa mertebesi sonsuz olan eleman vardı. Şimdi sadece sonlu mertebeye sahip elemanlar içeren üreteç kümelerini inceleyeceğiz. Aşağıdaki teoremde gönderim sınıf gruplarının üç tane sonlu mertebeye sahip eleman tarafından üretildiği gösterilmiştir. Bu teoremi Brendle ve Farbs, "Every Mapping Class Group Generated by 6 Involutions" makalesinde ispatlamıştır (Brendle ve Farb, 2005) .

**Teorem 10.1.**  $g \geq 1$  için yönlendirilmiş, kapalı  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu üç tane sonlu mertebeye sahip eleman tarafından üretilir.

Bu teorem ilk defa Birman (1977) tarafından gösterilmiş, daha sonra Brendle ve Farb (2004) tarafından değişiklikler yapılmıştır. Bu teoremi ispat etmek için aşağıdaki ön-sava ihtiyacımız olacak.

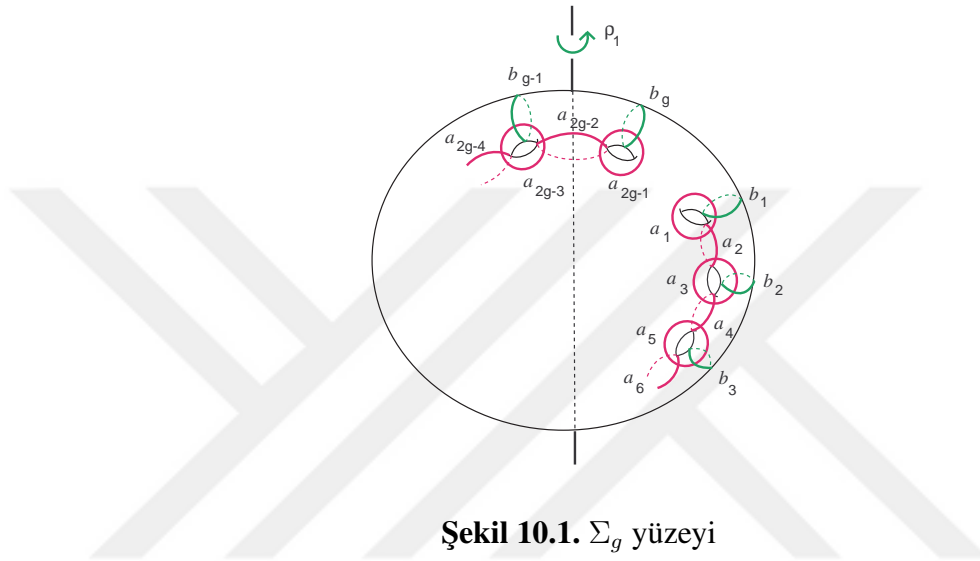
**Önsav 10.1.** Kapalı, yönlendirilmiş  $\Sigma_g$  yüzeyinde  $x$  herhangi bir yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğri olsun. O zaman  $x$  etrafındaki Dehn burgusu  $X$ 'i,  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun sonlu mertebeye sahip iki tane elemanının çarpımı şeklinde yazabiliriz.

*Kanıt.* Yönlendirilebilir, kapalı  $\Sigma_g$  yüzeyini ve bu yüzeydeki  $a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, d_1, d_2, \dots, d_{g-2}$  basit, kapalı eğrilerini Şekil 10.1'deki gibi alalım.  $\Sigma_g$  yüzeyinde  $x$ , herhangi yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı bir eğri olsun.

$S = A_{2g-1} \dots A_3 A_2 A_1 B_1$  ve

$Q = B_g A_{2g-1} \dots A_3 A_2 A_1 B_1$  olarak tanımlayalım.

Dolayısıyla  $Q = SB_g$  olduğu görülür. Şimdi  $x$  ve  $b_g$ ,  $\Sigma_g$  yüzeyinde yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğriler olduğundan, yüzeylerin sınıflandırılması teoreminden bir  $h$  homeomorfizması vardır öyle ki  $h(b_g) = x$ 'tir. O zaman Gerçek 6.1'den



Şekil 10.1.  $\Sigma_g$  yüzeyi

$$X = hB_g h^{-1} = hS^{-1}Qh^{-1} = (hS^{-1}h^{-1})(hQh^{-1}) \text{ olur.}$$

$S$  homeomorfizmasının mertebesi  $4g + 2$  ve  $Q$  homeomorfizmasının mertebesi  $2g + 2$ 'dir. Bu elemanların terslerinin ve eşleniklerinin mertebeleri de aynıdır. Dolayısıyla  $X$  Dehn burgusunu, mertebesi  $4g + 2$  ve  $2g + 2$  olan elemanların çarpımı şeklinde elde edilmiş oldu.

□

**Kanıt. (Teorem 10.1'in İspatı)**

Wajnryb (1996) makalesinde,  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun  $S$  ve  $B_{g-1}B_g^{-1}$  tarafından üretildiğini göstermiştir (Teorem 9.2). Şimdi ikinci üreteç olan  $B_{g-1}B_g^{-1}$ 'e  $U$  diyelim.  $\Sigma_g$  yüzeyinin tam ortasından Şekil 10.1'deki gibi bir şiş geçirdiğimizi düşünürsek,  $\rho_1$  dönüşümü bu yüzeyi şekilde gösterildiği yönde  $\pi$  kadar döndürsün öyle ki  $b_g$  basit kapalı eğrisini  $b_{g-1}$  basit kapalı eğrisine taşıyın. Bu takdirde,  $\rho_1(b_g) = b_{g-1}$  ve Gerçek 6.1'den  $\rho_1(B_g)\rho_1^{-1} = B_{g-1}$  ve  $B_g = S^{-1}Q$  olduğundan

$\rho_1(QS^{-1})\rho_1^{-1} = B_{g-1}$  olur.

O zaman  $U = B_{g-1}B_g^{-1}$  için

$U = \rho_1(QS^{-1})\rho_1^{-1}SQ^{-1}$  elde ederiz.

Dolayısıyla  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunu üretmek için  $\rho_1$ ,  $Q$  ve  $S$ 'i kullandık ki bu üç elemanın herbirinin mertebesi de sonludur. Bu elemanların mertebeleri sırasıyla 2,  $2g + 2$  ve  $4g + 2$ 'dir.  $\square$

Yukarıdaki teoremden  $\Sigma_g$  yüzeyinin üç tane sonlu mertebeye sahip eleman tarafından üretildiğini gördük. Acaba  $Mod(\Sigma_g)$  daha az eleman tarafından üretilebilir mi sorunu sorduğumuzda, bu soruya olumlu yanıt alıyoruz. Korkmaz bu soruya (2005) makalesinde pozitif cevap vermiştir.  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin mertebeleri  $4g + 2$  olan  $S$  ve  $BSB^{-1}$  elemanları tarafından üretildiğini göstermiştir.

**Teorem 10.2. Korkmaz (2005)**  $g \geq 3$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu iki tane sonlu mertebeye sahip  $S$  ve  $BSB^{-1}$  elemanları tarafından üretilir.

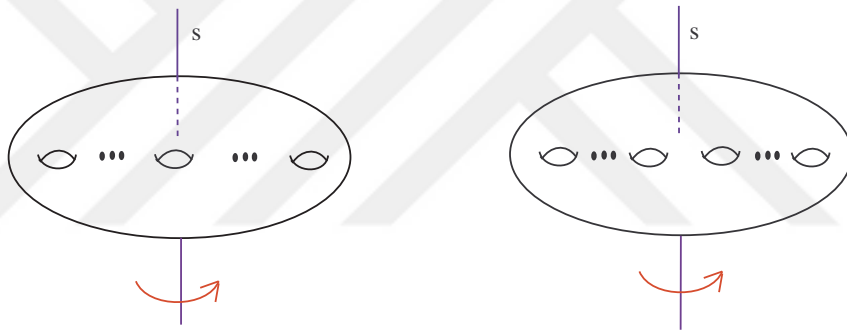
$\Sigma_g$  basit, kapalı, yönlendirilmiş bir yüzey ve  $S = B_1A_1A_2A_3\dots A_{2g-1}$  olsun.  $S$  homeomorfizmasının mertebesi  $4g + 2$ 'dir.  $G$  grubu,  $S$  ve  $BSB^{-1}$  tarafından üretilen  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin bir alt grubu olsun. Korkmaz (2005) makalesinin ana teoremi olan bu teoremden  $g \geq 3$  için  $G = Mod(\Sigma_g)$  olduğunu göstermiştir. Bunu gösterirken de lantern ilişkisini ve Gerçek 6.1'den faydalanmıştır. Gönderim sınıf grubu devirli olmadığından bir eleman tarafından üretilemez. Dolayısıyla bu üreteç sayısı minimumdur ve gönderim sınıf grubu daha az üreteç tarafından üretilemez.



## 11. İNVLUSYON ÜRETEÇLERİ

Yönlendirilebilen, kapalı, bağlantılı ve cins sayısı  $g$  olan  $\Sigma_g$  yüzeyini ele alalım. Bu yüzeylerin gönderim sınıf gruplarının  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin involusyonlardan (mertebesi iki olan eleman) oluşan üreteç kümesini ilk olarak Mc Carthy ve Papadopoulos (1987) makalesinde bulmuştur. Mc Carthy ve Papadopoulos, cins sayısı  $g \geq 3$  için  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin belli bir involusyonun sınırsız sayıda eşleniği tarafından üretildiğini ispatlamışlardır. Buradaki involusyon aşağıda verilen  $s$  involusyonudur.  $s$  involusyonu ise, yüzeyin tam ortasından geçip yüzeyi  $\pi$  kadar döndürür (Şekil 11.1).

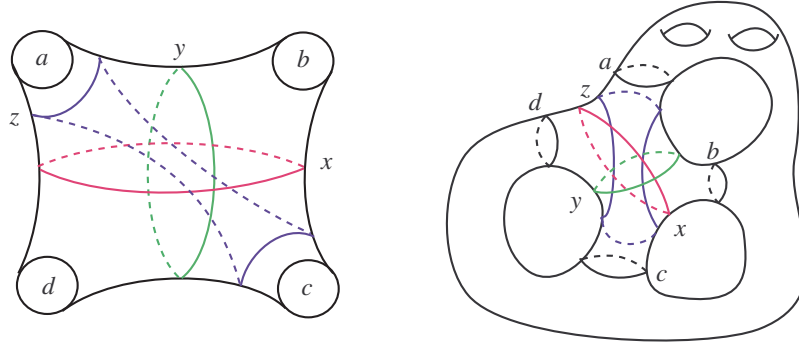
Luo (2000) makalesinde, ilk defa, yönlendirilebilen, kapalı, bağlantılı ve cins sayısı  $g \geq 3$  olan  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin sonlu sayıda involusyonlar tarafından üretildiğini göstermiştir.



**Şekil 11.1.**  $s$  involusyonu

**Teorem 11.1. (Luo, 2000)** Cins sayısı  $g \geq 3$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu,  $Mod(\Sigma_g)$ , sonlu tane involusyon tarafından üretilir.

*Kanıt.*  $\Sigma_g$ 'nin gönderim sınıf grubunun (Teorem 8.1)  $2g + 1$  tane sonlu tane yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğri etrafındaki Dehn burguları tarafından üretildiğini biliyoruz. Teoremin ispatı için bu yüzeydeki her yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğri etrafındaki Dehn burgusunun involusyonların çarpımı şeklinde yazılabildiğini göstermeliyiz. Bunu yaparken lantern ilişkisinden ve Gerçek 6.1'den yararlanacağız. Şekil 11.2'nin sol tarafındaki 4 delikli küre üzerinde  $ABCD = XYZ$  lantern ilişkisini yazabiliriz.  $\Sigma_g$  yüzeyinin cins sayısı  $g \geq 3$  olduğundan bu 4 delikli küreyi;  $x, y, z, a, b, c, d$  yüzeyi ayırmayan ve  $x \cup a, y \cup b$  ve  $z \cup c$  ikililerini yüzeyden çıkarınca yine bağlantılı bir yüzey



**Şekil 11.2.** Lantern ilişkisi

elde edecek şekilde  $\Sigma_g$  yüzeyine gömebiliriz (Örnek olarak bakınız Şekil 11.2'nin sağ tarafı). O zaman  $Mod(\Sigma_g)$ 'de aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

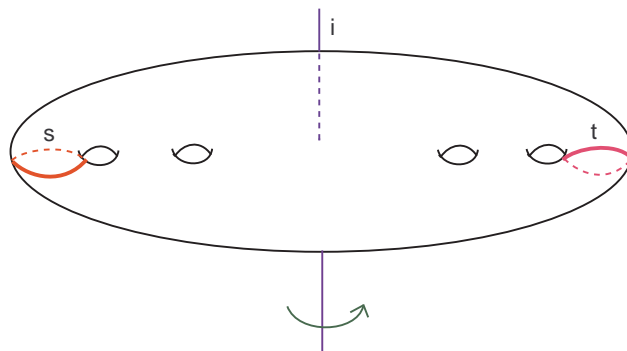
$$D = XA^{-1}YB^{-1}ZC^{-1} \text{ şeklinde yazabiliriz.}$$

$$K = XA^{-1}, L = YB^{-1} \text{ ve } M = ZC^{-1} \text{ diyelim.}$$

Şimdi K, L ve M'yi involusyonların çarpımı şeklinde yazabileceğimizi gösterelim. Bunun için aşağıdaki iddiayı ispatlamamız gerekecek.

**İddia** Herhangi iki  $u, v$  basit kapalı eğri çifti  $\Sigma_g$  yüzeyinde yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğri çifti olsun öyleki  $u$  ve  $v$  eğrilerini  $\Sigma_g$ 'den çıkardığımızda yüzeyimiz yine bağlantılı kalsın. O zaman  $UV^{-1}$  involusyonların çarpımı şeklinde yazılabilir.

İddiyanın kanıtı için  $u$  eğrisin  $v$  eğrisine götüren bir involusyon bulacağız.



**Şekil 11.3.**  $i$  involusyonu

Şekil 11.3'teki gibi  $s$  ve  $t$  yüzeyi ayırmayan basit kapalı eğrileri alalım. Şekildeki gibi yüzeyin ortasından bir şiş geçirdiğimizi varsayalım.  $i$  involusyonu bu şiş  $\pi$  kadar dön-

dürür. Dolayısıyla  $i$  involusyonu  $s$  eğrisini  $t$  eğrisine götürür. Yüzeylerin sınıflandırılması teoreminden  $u, v$  basit kapalı eğri çiftini  $s, t$  basit kapalı eğri çiftine götüren bir  $h$  homeomorfizması vardır. Sonuç olarak;  $u$  eğrisini  $v$  eğrisine götüren homeomorfizma ki buna  $f$  diyelim,  $s$  eğrisini  $t$  eğrisine götüren  $i$  involusyonunun  $h$  homeomorfizması ile eşleniği olur. Dolayısıyla  $f$  bir involusyon olmuş olur. Yani  $UV^{-1}$  çarpımını yazarsak;

$$UV^{-1} = U(fU^{-1}f^{-1})$$

ve  $f = f^{-1}$  olduğundan

$$UV^{-1} = (UfU^{-1})f$$

olur.  $f$  bir involusyon ve  $UfU^{-1}$ 'de  $f$  involusyonun bir eşleniği olduğundan, o da bir involusyondur. Dolayısıyla  $UV^{-1}$  iki tane involüsyonun çarpımıdır.

$D$  Dehn burgusunu  $K, L$  ve  $M$ 'nin çarpımı olarak yazınca, altı tane involusyonun çarpımını elde etmiş oluruz. Yüzeylerin sınıflandırılması teoreminden, yüzeydeki herbir yüzeyi ayırmayan, basit, kapalı eğri etrafındaki Dehn burgusunu altı tane involusyonun çarpımı şeklinde yazabiliriz. Yani  $\Sigma_g$ 'nin gönderim sınıf grubunu üreten tüm Humphries üreteçlerini (Teorem 8.1) involusyonların çarpımı şeklinde yazabiliriz ve böylece  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu  $(2g+1).6$  tane involusyon tarafından üretilmiş olur.  $\square$

Görüldüğü gibi Luo'nun kanıtlamış olduğu Teorem 11.1 ile involusyon üreteçlerinin sayısının sonlu, ancak cinsle bağlı olduğunu gördük. Dolayısıyla Luo, üreteç sayısının cins sayısından bağımsız bulunup bulunamayacağı sormuştur. Bu soruya yanıt Brendle ve Farb'dan gelmiştir. Cins sayısı  $g \geq 3$  olan yüzeylerin gönderim sınıf gruplarının altı tane involusyon tarafından üretildiğini 'Every mapping class group is generated by 6 involutions' adlı makalelerinde göstermişlerdir. Biz de bu bölümde  $g \geq 3$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun 6 adet involusyon tarafından üretildiğini gösteren Brendle ve Farb'ın ispatını vereceğiz:

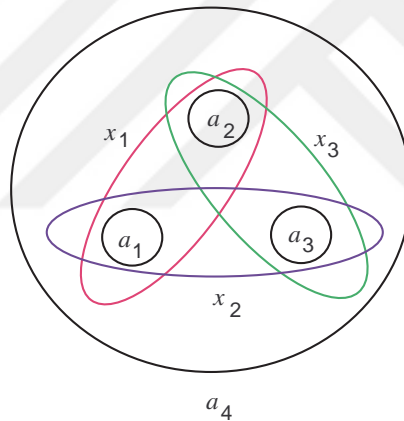
**Önsav 11.1. (Yüzeyi ayırmayan eğri etrafındaki Dehn burgusu için 4 involusyon)**  
Yönlendirilmiş, kapalı, bağlantılı, cins sayısı  $g \geq 3$  olan  $\Sigma_g$  yüzeyi üzerinde  $c$ , basit, kapalı, yüzeyi ayırmayan bir eğri olsun. Bu takdirde  $C$  Dehn burgusunu dört tane involusyonun çarpımı şeklinde yazabiliriz.

*Kanıt.* Cins sayısı  $g \geq 3$  ise Şekil 11.4'teki gibi lantern ilişkisini uygulayabileceğimiz, 4 delikli küreyi  $\Sigma_g$  yüzeyimize gömebiliriz. Ayrıca  $\Sigma_g$  yüzeyinde lanterndeki 7 eğri de  $(x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2, a_3)$  yüzeyi ayırmayan basit, kapalı eğri olacak ve  $x_1 \cup a_1, x_2 \cup a_2, x_3 \cup a_3$  yüzeyi ayırmayacak şekilde yerleştirebiliriz. Yani  $x_i, a_i$  eğri çiftleri boyunca  $\Sigma$  yüzeyini kestiğimiz zaman, yine bağlantılı bir yüzey elde edeceğiz. Şimdi lantern ilişkisinden;

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = X_1 X_2 X_3$$

$$A_4 = [X_1 A_1^{-1}] [X_2 A_2^{-1}] [X_3 A_3^{-1}] \quad (11.1)$$

eşitliğini yazabiliriz.



**Şekil 11.4.** Dört delikli küre

$\Sigma$  yüzeyindeki her bir  $x_i, a_i$  eğri çifti için  $I_i$  involusyonu bulabiliriz öyle ki;

$$I_1(x_1) = a_1$$

$$I_2(x_2) = a_2$$

$$I_3(x_3) = a_3$$

olsun. (Bakınız Teorem 11.1'in ispatı ispatı).

Dolayısıyla her  $1 \leq j \leq 3$  için  $X_j A_j^{-1} = (X_j I_j X_j^{-1}) I_j$  elde ederiz ki  $X_j I_j X_j^{-1} = \tilde{I}_j$  dersek bu  $I_j$  involusyonunun eşleniğidir. Yani  $\tilde{I}_j$  bir involusyon olur.

Yani  $X_j A_j^{-1}$  homeomorfizmasını,  $\tilde{I}_j$  ve  $I_j$  involusyonlarının çarpımı şeklinde yazmış

olduk. Dolayısıyla Teorem 11.1'den  $A_4$  Dehn burgusunu altı adet involusyonun çarpımı şeklinde yazabiliriz.

Şimdi bu sayıyı dörde indireceğiz.  $\Sigma_g$  yüzeyindeki  $x_i, a_i$  eğrilerini Şekil 11.5'teki gibi seçebiliriz. Yüzeyimizi  $a_4$  eğrisi boyunca kesip yüzeyin ortasından bir şiş geçirdiğimizi varsayalım.  $J_1$  involusyonu bu yüzeyi  $\pi$  kadar döndürür.  $J_1$  involusyonunun  $(a_1, x_1)$  çiftini  $(a_2, x_2)$  çiftine taşıdığı açıkça görebiliyoruz. Dolayısıyla

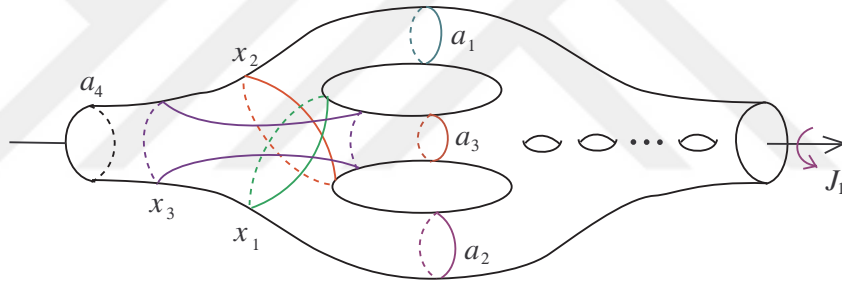
$$J_1(a_1) = a_2 \text{ ile Gerçek 6.1'i kullanarak } A_2 = J_1 A_1 J_1^{-1} \text{ ve}$$

$$J_1(x_1) = x_2 \text{ ile Gerçek 6.1'den } X_2 = J_1 X_1 J_1^{-1}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu takdirde

$$X_2 A_2^{-1} = X_2 (J_1 A_1 J_1^{-1}) = (J_1 X_1 J_1^{-1}) (J_1 I_1 X_1^{-1} I_1 J_1) = [J_1 (X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1 J_1]$$

şeklinde yazabiliriz.  $X_2 A_2^{-1}$  çarpımını yazarken üç adet involusyon;  $J_1, X_1 I_1 X_1^{-1}$  ve  $I_1$ 'i kullanmış olduk.



Şekil 11.5.  $J_1$  involusyonu

Şimdi  $(a_1, x_1)$  çiftini  $(a_3, x_3)$  çiftine taşıyan bir  $J_2$  involusyon vardır öyleki  $x_1$  eğrisini sabit tutup  $x_3$  eğrisini  $x_2$  eğrisine kaydırırsak  $J_2$  homeomorfizmasını görebiliriz.  $J_1$  için yaptıklarımızı  $J_2$  için de yaparsak;

$$X_3 A_3^{-1} = [J_2 (X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1 J_2]$$

elde ederiz. Yani  $X_3 A_3^{-1}$  çarpımını yazarken ek olarak  $J_2$  involusyonunu kullandık.

Şimdi bunları Eş. 11.1 denkleminde yerine yazarsak;

$$A_4 = [(X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1] [J_1 (X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1 J_1] [J_2 (X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1 J_2]$$

olur. Yüzeylerin sınıflandırılması teoreminden,  $A_4$  Dehn burgusunu varsayımdaki  $C$  Dehn burgusuna götüren bir homeomorfizma vardır. Yani  $C$  Dehn burgusunu da dört adet involusyonun çarpımı şeklinde yazabiliriz.

□

**Teorem 11.2. (Brendle ve Farb, 2004):** Yönlendirilebilen, kapalı, bağlantılı ve cins sayısı  $g \geq 3$  olan  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu 6 tane involusyon tarafından üretilir.

*Kanıt.* Bu teoremi kanıtlarken,  $a_i$  eğrisi etrafındaki Dehn burgusunu yazarken hem  $A_i$  hem de  $T_{a_i}$  notasyonunu kullanacağız. Lickorish, yönlendirilebilen, kapalı, bağlantılı ve cins sayısı  $g \geq 3$  olan  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin  $3g - 1$  tane yüzeyi ayırmayan eğri etrafındaki Dehn burgusu tarafından üretildiğini göstermiştir. Bu eğriler için bakınız Şekil 11.6. Bu şekildeki Lickorish üreteçleri  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$  ve  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{g-1}$  eğrileridir. Bu ispatta bu Dehn burgularının her birinin involusyonlar tarafından yazılabileceğini göstereceğiz.  $\Sigma_g$  yüzeyimizi Şekil 11.6'daki gibi alalım. "R" homeomorfizması yüzeyimizi  $2\pi/g$  kadar saat yönünde döndüren homeomorfizma olsun.  $\alpha_1, \beta_1$  ve  $\gamma_1$ 'e defalarca "R" homeomorfizmasını uygularsak, bütün Lickorish üreteçlerini elde ederiz. Yani;

Her  $0 \leq m \leq g - 1$  için  $R^m(\alpha_1), R^m(\beta_1)$  ve

her  $0 \leq m \leq g - 2$  için  $R^m(\gamma_1)$

$3g - 1$  tane Lickorish üreteçlerini verir.

Şekil 11.7'deki gibi yüzeyin ortasından geçen  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  involusyonları yüzeyimizi  $\pi$  kadar döndürsün. İlk önce  $\rho_2$  sonrasında  $\rho_1$  involusyon uygularsak,  $R$  homeomorfizmasını elde ederiz.

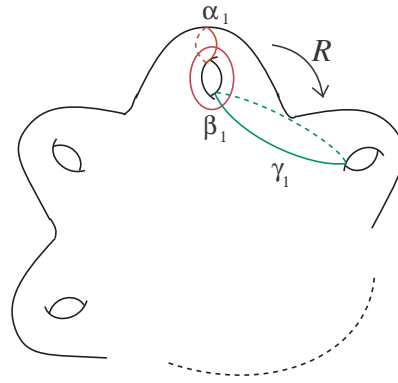
$$R_g = \rho_1\rho_2 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla  $R$  iki adet involusyonun çarpımından elde edilir. Şimdi  $T_{\alpha_1}, T_{\beta_1}$  ve  $T_{\gamma_1}$  'leri involusyonların çarpımı şeklinde yazarsak ispatımızı tamamlamış olacağız.

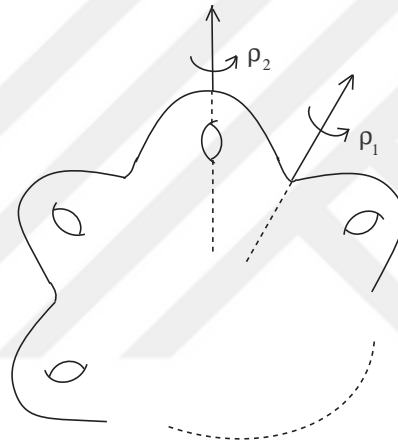
$\beta_1$  yerine  $R^2(\beta_1)$  eğrisini alalım. Kolaylık olsun diye  $R^2(\beta_1), \alpha_1$  ve  $\gamma_1$  eğrilerine sırasıyla  $\beta, \alpha$  ve  $\gamma$  diyelim.

$\beta, \alpha$  ve  $\gamma$  eğrileri etrafındaki Dehn burgularını involusyonların çarpımı ile yazılabileceğini göstermek için her seferinde İlişki 6.4'ü yani lantern ilişkisini defalarca kullanacağız.

Lantern ilişkisindeki sınır eğrileri olan  $a_1, a_3, a_4$  eğrileri yerine sırasıyla  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  eğrilerini alalım. Lanterndeki  $a_1, a_4$  ikilisini  $a_2, a_3$  ikilisinden ayıran  $x_1$ 'i de Şekil



**Şekil 11.6.**  $R$  homeomorfizması



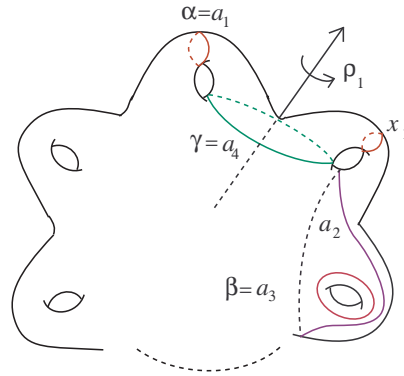
**Şekil 11.7.**  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  involusyonları

11.8'deki gibi alalım. Burada  $\rho_1(a_1) = x_1$  olduğundan  $\rho_1$ , İlişki 6.4'deki  $I_1$  involusyonunun görevini görür.

Böylece İlişki 6.4'ten;

$$\begin{aligned}
 T_\gamma &= A_4 = (X_1 A_1^{-1})(X_2 A_2^{-1})(X_3 A_3^{-1}) \\
 &= (X_1 T_\alpha^{-1})(X_2 A_2^{-1})(X_3 T_\beta^{-1}) \\
 &= [(X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1] [J_1 (X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1 J_1] [J_2 (X_1 I_1 X_1^{-1}) I_1 J_2] \\
 &= [(X_1 \rho_1 X_1^{-1}) \rho_1] [J_1 (X_1 \rho_1 X_1^{-1}) \rho_1 J_1] [J_2 (X_1 \rho_1 X_1^{-1}) \rho_1 J_2]
 \end{aligned}$$

elde ederiz.  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  involusyonları daha önce  $R$  homeomorfizmasını üretmek için kullanmıştık. Dolayısıyla  $T_\gamma$ 'yi 3 tane farklı involusyonun çarpımı şeklinde yazabiliyoruz. Biz şimdi  $\Sigma_g$  yüzeyimizin farklı bir gömülüşünü ele alalım. Burada  $J_3$  involusyonu  $x_3$  eğrisini sabit tutup  $a_3$  eğrisini  $a_4$  eğrisine taşıyın. Dolayısıyla  $J_3 J_2$  involusyonu  $x_3$  eğ-



**Şekil 11.8.**  $a_1, a_4$  ikilisini  $a_2, a_3$  ikilisinden ayıran  $x_1$  eğrisi

risini sabit tutup  $a_1$  eğrisini  $a_4$  eğrisine taşıyın.  $T_\beta$  Dehn burgusunu yazarsak;

$$\begin{aligned} T_\beta &= A_3 = (X_1 A_1^{-1})(X_2 A_2^{-1})(X_3 A_4^{-1}) \\ &= (X_1 T_\alpha^{-1})(X_2 A_2^{-1})(X_3 T_\gamma^{-1}) \\ &= [(X_1 \rho_1 X_1^{-1}) \rho_1] [J_1 (X_1 \rho_1 X_1^{-1}) \rho_1 J_1] [J_3 J_2 (X_1 \rho_1 X_1^{-1}) \rho_1 J_2 J_3] \end{aligned}$$

elde ederiz ki sadece öncekilerden farklı olarak  $J_3$  involusyonunu kullanmış olduk.

Benzer olarak  $x_1$  eğrisini sabit tutup  $a_1$  eğrisini  $a_4$  eğrisine taşıyan  $J_4$  involusyonu vardır. Son olarak  $T_\alpha$  Dehn burgusunu yazarsak;

$$\begin{aligned} T_\alpha &= A_1 = (X_1 A_4^{-1})(X_2 A_2^{-1})(X_3 A_3^{-1}) \\ &= (X_1 T_\beta^{-1})(X_2 A_2^{-1})(X_3 T_\gamma^{-1}) \\ &= [J_4 (X_1 A_1^{-1}) J_4] [J_1 (X_1 A_1^{-1}) J_1] [J_2 (X_1 A_1^{-1}) J_2] \end{aligned}$$

olur ki burada  $J_4$  involusyonu M. Kassabov'un belirtmesi üzerine anlaşılmıştır ki yeni bir involusyon olmayıp  $J_2 J_3 J_2$  involusyonlarının çarpımıdır. Dolayısıyla Likorish üreticilerinin hepsini 6 adet involusyon ile elde etmiş olduk.  $\square$

Kassabov ise (2003) makalesinde cins sayısı  $g \geq 3$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun

- cins sayısı  $g \geq 7$  için 4 adet involusyon,
- cins sayısı  $g \geq 5$  için 5 adet involusyon,
- cins sayısı  $g \geq 3$  için 6 adet involusyon

tarafından üretildiğini göstermiştir.



## 12. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kapalı, yönlendirilmiş, bağlantılı  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubu,  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin, üreteç kümeleri üzerine pek çok araştırma bulunmaktadır. Bu araştırmalar 1920'li yıllarda başlamıştır. Max Dehn, gönderim sınıf gruplarının cebirsel yapısını inceleyen ilk kişidir. Kapalı, yönlendirilmiş bir yüzeyin gönderim sınıf grubunun sonlu pek çok burgu tarafından üretildiğini ispatlamıştır. Dehn burgularının mertebesi sonsuz olmakla beraber yüzeylerin gönderim sınıf gruplarını üretmekte önemli rol oynamaktadır. Dehn, yaptığı çalışmalarda cins sayısı  $g \geq 3$  için  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin  $2g(g-1)$  tane Dehn burgusu tarafından üretildiğini göstermiştir. Daha sonra Lickorish (1964) makalesinde,  $3g-1$  tane yüzeyi ayırmayan eğri etrafındaki Dehn burgusunun bu grubu ürettiğini göstermiştir. Son olarak Humphries, (1979) makalesinde  $g \geq 2$  için bu sayının  $2g+1$  tane olduğunu ve bu sayının  $Mod(\Sigma_g)$ 'yi üretmek için gerekli olan minimum Dehn burgusu sayısını olduğunu ispatlamıştır. Bu sayıyı daha da düşürmek mümkün olmadığından, yüzeylerin gönderim sınıf gruplarının, Dehn burgularından başka üreteç kümeleri ile üretilebilir mi sorusu akla gelmiştir.

$Mod(\Sigma_g)$ 'nin farklı üreteç kümelerini bulmak için yapılan çalışmalarda Wajnryb (Teorem 9.2),  $g \geq 3$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun  $S$  ve  $B_{g-1}B_g^{-1}$  elemanları tarafından üretildiğini göstermiştir. Burada  $S$  homeomorfizmasının mertebesi  $4g+2$  ve  $B_{g-1}B_g^{-1}$  homeomorfizmasının mertebesi sonsuzdur. Korkmaz ise Teorem 9.3'de,  $g \geq 2$  için kapalı yönlendirilmiş  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun, mertebesi  $4g+2$  olan  $S$  elemanı ve mertebesi sonsuz olan  $B$  elemanı tarafından üretildiğini ispatlamıştır. Bu üreteçlerde bir tane de olsa mertebesi sonsuz olan eleman vardır. Tüm üreteçleri sonlu mertebeye sahip üreteçler kümesi üzerine de çalışmalar yapılmıştır. Brendle ve Farb "Every Mapping Class Group Generated by 6 Involutions" (Brendle ve Farb, 2005) makalesinde  $g \geq 1$  için yönlendirilmiş kapalı  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun, üç tane sonlu mertebeye sahip eleman:  $\rho_1$ ,  $Q$  ve  $S$  tarafından üretildiğini göstermişlerdir. Bu elemanların mertebeleri sırasıyla  $2$ ,  $2g+2$  ve  $4g+2$ 'dir. Daha sonra Korkmaz Teorem 10.2'de,  $g \geq 3$  için  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin mertebeleri  $4g+2$  olan  $S$  ve  $BSB^{-1}$  elemanları tarafından üretildiğini göstermiştir. Bu üreteç sayısı minimumdur, daha az üreteç tarafından üretilemez. Çünkü gönderim sınıf grubu devirli olmadığından bir eleman tarafından üretilemez.

Sırada  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin sonlu mertebeye sahip üreteçlerinin mertebelerini ne kadar küçültebiliriz sorusu akla gelmektedir. İlk olarak Mc Carthy ve Papadopoulos,  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin involusyonlardan (mertebesi iki olan eleman) oluşan üreteç kümesini bulmuşlardır. Mc Carthy ve Papadopoulos (1987) makalesinde, cins sayısı  $g \geq 3$  için  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin belli bir involusyonun (Şekil 11.1) sınırsız sayıda eşleniği tarafından üretildiğini ispatlamışlardır. Daha sonra Luo, (Teorem 11.1), sonlu sayıda involusyonun, daha da açık yazacak olursak,  $Mod(\Sigma_g)$ 'nin  $(2g + 1) \cdot 6$  tane involusyon tarafından üretildiğini göstermiştir. Luo'nun ispatında, involusyon üreteçlerinin sayısının sonlu, ancak cinsle bağlı olduğu görülüyor. Dolayısıyla üreteç sayısının cins sayısından bağımsız bulunup bulunamayacağı araştırılmıştır. Brendle ve Farb (2004) makalelerinin ana teoreminde, cins sayısı  $g \geq 3$  yüzeylerin gönderim sınıf gruplarının 6 tane involusyon tarafından üretildiğini göstermişlerdir. Yukarıda bahsettiğimiz sonuçlar  $g \geq 3$  için doğrudur.

Şimdi cins sayısını daha da düşürebilir miyiz ona bakalım:

- Cins sayısı  $g = 0$  için yüzeyimiz bir disk yüzeyidir. Diskin gönderim sınıf grubu tek elemanlı (birim eleman) grup olan  $\bar{Z}$  grubudur.
- Cins sayısı  $g = 1$  için torus yüzeyini elde ederiz. Dolayısıyla  $Mod(\Sigma_1) = SL_2\mathbb{Z}$  olduğundan  $2 \times 2$  tipinde  $\det = 1$  olan matrislerden oluşur. Bu grupta ise sadece bir adet involusyon

$$-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunmaktadır.

Dolayısıyla bu involusyon  $SL_2\mathbb{Z}$  grubunu üretmek için yeterli değildir.

- Mc Carthy ve Papadopoulos  $g = 2$  için  $Mod(\Sigma_2)$ 'nin involusyonlar tarafından üretilen alt grubunu inceliyor ve bu grubun gönderim sınıf grubunu üretmek için yeterli olmadığını göstermişlerdir. Dolayısıyla  $g \leq 2$  olan yüzeyler için, involusyonlar bu yüzeylerin gönderim sınıf grubunu üretmeye yetmez.

Kassabov cins sayısı  $g \geq 7$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun 4 adet involusyon tarafından üretildiğini göstermiştir.

O zaman bu involusyon sayısını daha da düşürebilir miyiz sorusu akla geliyor.

- $Mod(\Sigma_g)$  devirli bir grup olmadığından 1 tane involusyon tarafından üretilemez.
- $Mod(\Sigma_g)$  dihedral bir grup olmadığından 2 tane involusyon tarafından üretilemez.

### 12.1. Sorular

- **Soru 1:**  $Mod(\Sigma_g)$ , 3 adet involusyon tarafından üretilebilir mi?

Şimdiye kadar herhangi bir yüzeyin gönderim sınıf grubunun 3 adet involusyon tarafından üretildiği gösterilememiştir. Bunun aksine 3 adet involusyonun gönderim sınıf grubunu üretmeye yetmeyeceğine dair de herhangi bir çalışma yapılamamıştır.

Kassabov (2003) makalesinde, Brendle ve Farb (2004) makalelerinde (Teorem 11.2)  $g \geq 3$  olan  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun 6 tane involusyon tarafından üretildiğini göstermişlerdir. Kassabov aynı makalesinde  $g \geq 5$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun 5 adet involusyon ile üretildiğini göstermiştir. Dolayısıyla aşağıdaki sorunun cevabı halen bulunamamıştır.

- **Soru 2:**  $3 \leq g < 5$  için  $Mod(\Sigma_g)$ , 5 adet involusyon tarafından üretilebilir mi?

Kassabov (2003) makalesinde  $g \geq 7$  için  $\Sigma_g$  yüzeyinin gönderim sınıf grubunun 4 adet involution tarafından üretildiğini göstermiştir. Ancak aşağıdaki sorunun cevabı halen açıktır.

- **Soru 3:**  $3 \leq g < 7$  için  $Mod(\Sigma_g)$ , 4 adet involution tarafından üretilebilir mi?

## KAYNAKLAR

- Birman, J., 1977. The algebraic structure of surface mapping class groups. *Discrete Groups and Automorphic Functions*, 163-198.
- Brendle, T.E., Farb, B., 2004. Every mapping class group is generated by 6 involutions. *Journal of Algebra*, 278(1), 187-198.
- Dehn, M., 1938. Die gruppe der abbildungsklassen. *Acta Math*, 69(1), 135-206.
- Humphries, S.P., 1979. Generators for the mapping class group. *Topology of Low Dimensional Manifolds*, 722, 44-47.
- Kassabov, M., 2003. Generating mapping class groups by involutions. 25.
- Korkmaz, M., 2005. Generating the surface mapping class group by two elements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(8), 3299-3310.
- Korkmaz, M., 2012. Minimal generating sets for the mapping class group. 3, 441-463..
- Lickorish, W.B.R., 1964. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 60, 769-778.
- Luo, F., 2000. Torsion elements in the mapping class group of a surface. 8.
- McCarthy, J., Papadopoulos, A., 1987. Involutions in surface mapping class groups. *Enseign. Math.*, 33, 275-290.
- Wajnryb, B., 1996. Mapping class group of a surface is generated by two elements. 35(2), 377-383.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı.....: KIVANÇ, Esra

Uyruğu.....: T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri.....: 31.03.1987 – Tokat

Medeni Hali.....: Evli

Telefon.....: 05536124199

e-mail.....: [ekivanc19@gmail.com](mailto:ekivanc19@gmail.com)

### Eğitim Derece.....Eğitim Birimi.....Mezuniyet Tarihi

Lisans	Celal Bayar Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2009
Lise	Atatürk Lisesi	2005

### Yabancı Dil

İngilizce