



T.C.

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SALGIN HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ

Yüksek Lisans

Seda BIÇAKCI

Çorum - 2023

SALGIN HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ

Seda BIÇAKCI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans

TEZ DANIŞMANI

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ

Çorum 2023

Seda BIÇAKCI tarafından hazırlanan “Salgın Hastalıkların Matematiksel Modellemesi” adlı tez çalışması 07/09/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Haydar ALICI

.....

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ

.....

Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT

.....

Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun /..... /..... tarih ve sayılı kararı ile Seda BIÇAKCI' nın MATEMATİK Anabilim Dalında Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Prof. Dr. Muhammed Asif YOLDAŞ

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Seda BIÇAKCI



SALGIN HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ

Seda BIÇAKCI

ORCID: 0000-0002-8047-2176

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans

Eylül 2023

ÖZET

Dönem dönem dünyanın belli yerlerinde deprem, sel, savaş, çevre kirliliği gibi bir çok sebeple baş gösteren çeşitli salgın hastalıklar insanoğlu için büyük kayıplara neden olmuştur. Bulaşıcı hastalıkların seyrini görselleştirmek için matematiksel modellerden yararlanılmıştır. Öncelikle ilk matematiksel model olan SIR modeli ile birlikte, bu modele farklı kategoriler eklenerek yeni oluşan matematiksel modeller incelenmiştir. Zamana göre değişimi ifade eden diferansiyel denklemleri içeren bu modellerin çözümünde sayısal metotlardan yararlanılmıştır. Bunun yanı sıra tüm dünyada pandemiye sebep olan, bulaşıcılığı yüksek ve ölümlerle sonuçlanabilecek Covid-19 hastalığı, literatürdeki matematiksel modele aşı parametresi dahil edilerek modellenmiştir. Türkiye çerçevesinde bu modelin belirli bir zaman aralığında sayısal çözümleri gerçek verilerle karşılaştırılmıştır. Hem kentsel hem de sosyal yaşamda bulaşıcılığı kolay ve yüksek Covid-19'un, aşının yeni bir kategori olarak eklenmesiyle elde edilen SVIR modelinde, aşının Covid-19 hastalığının seyrine etkisi araştırılmıştır.

Anahtar Kavramlar: Pandemi, Matematiksel Model, Covid-19

Bilim Kodu: 20406

MATHEMATICAL MODELLING OF EPIDEMIC DISEASES

Seda BIÇAKCI

ORCID: 0000-0002-8047-2176

HITIT UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL

Master of Science

SEPTEMBER 2023

ABSTRACT

Various epidemics, which started in certain parts of the world from time to time due to many reasons such as earthquakes, floods, wars and environmental pollution, have caused great losses for human beings. Mathematical models were used to visualize the progress of infectious diseases. First of all, with the SIR model as a first mathematical model, other mathematical models which is obtained by adding different categories to this model were examined. Numerical methods were used in the solution of these models which include differential equations expressing the change with respect to time. In addition, Covid-19 disease, which causes pandemics all over the world, is highly contagious and can result in death, has been modelled by including vaccine parameters in the mathematical models in the literature. The numerical solutions of this model was compared with real data in the framework of Türkiye during a determined period. The effect of the vaccine on the process of Covid-19 disease, which is easily and highly contagious in both urban and social life, was investigated in the SVIR model, which was obtained by adding the vaccine as a new category.

Key Terms: Pandemy, Mathematical Modelling, Covid-19

Science Code: 20406

TEŐEKKÖR

Bu çalıőmanın her aőamasında bana zaman ayırıp deęerli bilgi ve birikimlerini benimle paylaőan, yol gōsteren ve manevi desteęini esirgemeyen sayın danıőman hocam Dr. Őęr. Őyesi Hüseyn ALTUNDAĖ' a ve beni yűksek lisans yapmaya teővik eden kıymetli eőime teőekkűrlerimi sunarım.

Seda BIÇAKCI



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
GİRİŞ.....	1

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

1.1. Limit, Süreklilik, Türev.....	3
1.1.1. Limit.....	3
1.1.2. Süreklilik.....	3
1.1.3. Türev.....	3
1.2. Özdeğer ve Özvektör.....	4
1.3. Kısmi Türev ve Zincir Kuralı.....	5
1.4. Taylor Serileri ve Kesme Hatası.....	5
1.5. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri.....	7
1.5.1. Başlangıç değer problemleri.....	7
1.5.2. Taylor serisi yöntemi.....	9
1.5.3. Euler metodu.....	10
1.5.4. Yerel hata.....	12
1.5.5. Kümülatif hata.....	12
1.5.6. Heun metodu.....	13
1.5.7. Runge kutta metodları.....	14

1.5.8. İkinci mertebeden Runge-Kutta metodu	15
1.5.9. Üçüncü mertebeden Runge-Kutta metodu	16
1.5.10. Dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu	17

2. BÖLÜM

MODELLER

2.1. SIR Modeli.....	18
2.1.1. SIR modelinin analitik çözümü	19
2.2. SI Modeli.....	22
2.3. SIS Modeli	22
2.4. SEIR Modeli.....	23
2.5. SIRD Modeli	23
2.6. SEIRD Modeli.....	24

3. BÖLÜM

MATEMATİKSEL MODELLERE ETKİ EDEN FAKTÖRLER VE TEMEL ÜREME SAYISI(R_0)

3.1. Kapanma Stratejileri	25
3.1.1. Periyodik kapanma.....	25
3.2. Kapanmada İhlal.....	26
3.3. Karantina ve Test Stratejileri	26
3.4. Sosyalleşme ve Hareketlilik.....	27
3.5. Testlerin Güvenilirliği.....	27
3.6. Hastalığın Genetik Değişime Uğraması(Mutasyonlar)	27
3.7. Aşı, Tedavi Yöntemleri ve toplumsal Bağışıklık	28
3.8. Temel Üreme Sayısı(R_0)	28
3.8.1. $R_0 = \exp(rT_c)$ formülüne göre R_0 hesaplama.....	29
3.8.2. $R_0 = 1+rT_c$ formülüne göre R_0 hesaplama	29
3.8.3. Matris temelli yaklaşımlarla R_0 hesaplanması.....	29

4. BÖLÜM

COVID-19 HASTALIĞI İÇİN AŞI İÇEREN SVIR MODELİ VE SAYISAL SONUÇLAR

4.1. SVIR Modeli.....	35
4.2. Sayısal Sonuçlar	36
SONUÇ/SONUÇ VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	42



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. Farklı aşılama sabitleri için I (aktif vaka sayısı) değişkeninin çözümleri.....	37
Şekil 4.2. Duyarlı nüfus değişkeni S' nin zamana göre değişim grafiği	38
Şekil 4.3 Aşılama nüfus değişkeni V' nin zamana göre değişim grafiği	39
Şekil 4.4. Enfekte nüfus(aktif vaka sayısı) değişkeni I' nin zamana göre değişim grafiği	39
Şekil 4.5. Kurtulan(iyileşen+vefat eden) nüfus değişkeni R' nin zamana göre değişim grafiği.....	40



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

R_0	Temel Üreme Sayısı
α	Bulaşma Oranı
β	İyileşme Oranı

Kısaltmalar

WHO	Dünya Sağlık Örgütü
-----	---------------------



GİRİŞ

Tarih boyunca insanoğlu sayısız salgın hastalıkla mücadele etmiş ve bu mücadelelerin birçoğundan galip ayrılmıştır. Sağlık üzerine uğraşan bilim insanları yüzyıllar boyunca salgın hastalıklarla mücadele etme yollarını aramışlar ve birçok araştırma ve çözüm yolları bulmuşlardır. Belirli insan topluluklarında, hastalıkların dağılımının ölçülmesi 19.yy da yapılmaya başlanmıştır. 19.yüzyılın sonlarına kadar toplumların en büyük sorunu olan kolera, veba, tüberkloz, tifo, veba, ispanyol gribi, çiçek gibi hastalıklar, ülkeden ülkeye yayılarak milyonlarca kişinin hastalanmasına ve hatta binlercesinin ölümüne yol açan enfeksiyon hastalıklarını (bulaşıcı hastalıkları) oluşturmaktadır. Hastalık yapıcı herhangi bir mikroorganizmanın insan vücuduna girip, burada yerleşmesi ve çoğalmasına "bulaşma (enfeksiyon)", bunun sonucunda çıkan hastalığada "bulaşıcı hastalık (enfeksiyon hastalığı)" adı verilmektedir (Pesen, 2021). Bulaşıcı hastalıklar bazen salgın hale gelerek, toplum sağlığını önemli ölçüde tehlikeye düşürmüşlerdir. Bir hastalığın belli bir zaman aralığında fazla sayıda görülmesi durumuna "salgın (epidemi)", kıta ve kıtaları etkileyen büyük salgınlara da "pandemi" denilmektedir (Tekin, 2021). 1347 yılındaki Veba Salgını, 1817 yılındaki Kolera Salgını, 1914 yılında yaşanan İspanyol Gribi, 1968 yılında Hong Kong Gribi ve yakın zamanda yaşadığımız Covid-19 tarihimizde pandemiye sebep olan salgınlardır (Parıldar, 2020; Tekin, 2021). 2019 yılında ilk olarak Çin'in Hubei eyaletinin Wuhan şehrinde görülen Covid-19 salgını bir kaç ay sonra WHO (Dünya Sağlık Örgütü) tarafından pandemi olarak ilan edilmiştir. Bu tür salgınların toplum içerisinde hızla yayılmasında birçok etmen rol oynar. Bunlardan birincisi hastalığa neden olan mikroorganizmaların zamanla farklılaşp mutasyona uğrayarak alınan tedbirleri zayıflatması ve daha büyük kitleleri etki altına almasıdır. Bir diğer etmen ise hastalığa maruz kalan bireylerin kişisel fizyolojik yapılarıdır. Bazı bireyler hastalığa karşı direnç gösterebilirken bazı bireyler ise bağışıklıklarının daha düşük seviyede olmasından dolayı hastalıkla mücadelede zayıf kalmakta ve hatta hastalığa yenik düşmektedir. Bunlara ek olarak dış etmenler de salgının yayılmasında etkin bir faktördür. Dış etmenleri mevsimsel etkiler, toplumların demografik yapıları, ülkelerin gelişmişlik düzeyleri, buna bağlı olarak alınan tedbirler olarak sıralayabiliriz. Ayrıca hastalıkla zaman içerisinde mücadele edebilmek için geliştirilen ilaç ve aşılar, ülkelerin sahip olduğu olanaklar, insanların hastalığa karşı bilinçli davranıp kurallara uyması vb. etmenler ise hastalığın yayılmasını yavaşlatan faktörler olarak karşımıza çıkmaktadır. Toplumlarda salgının neden olduğu psikolojik sonuçlar da bireyleri olumsuz yönde etkilemektedir.

Bulaşıcı hastalıkların nedenlerinin araştırılması ile ilgili çalışmalar epidemiyoloji alanında yapılmaktadır. Epidemiyoloji, belirli toplumlarda sağlıkla ilgili durum ya da olayların, toplumda kişi, yer ve zaman özelliklerine göre incelenmesi ve elde edilen bulguların sağlık sorunlarının önlenmesi ve kontrolüne uygulanmasıdır. Bulaşıcı hastalıkların kontrolü ve yayılmasını analiz etmek için matematik modellemeleri önemli araç olmuştur. Etrafımızdaki dünyayı daha iyi bir seviyede anlayabilmek ve sonrasında teknik sorunlara çözüm bulabilmek için, karşılaşılan problemleri

matematiksel terimlerle temsil etmeye matematiksel modelleme denir. Gerçeği matematiksel bir dil ile ifade etmeye yardım eden bu düşünce ve uygulama şekli, bugün tıptan mühendisliğe, temel bilimlerden sosyal bilimlere birçok alanda araştırmaların vazgeçilmez bir parçası durumundadır. Matematiksel modelleme en genel anlamıyla matematik veya matematik dışındaki bir olayı, olguyu, olaylar arasındaki ilişkileri matematiksel olarak ifade etmeye çalışma, bu olaylar ve olgular içerisinde matematiksel örüntüler ortaya çıkarma sürecidir. Matematik modeller gerçek sistemi birebir temsil edemese de modelin uygulandığı sistemi anlamamızı sağlar. Salgın hastalıkların matematiksel modellemesi bu süreçlere çok güzel bir örnektir. Tarihte karşımıza çıkan ilk salgın hastalığın matematiksel modellemesi 18. yüzyıl ortalarında Bernoulli tarafından yapılmıştır (Bernoulli, 1766). Bu ilk çalışmayla bilim adamları, matematiksel modellemenin salgın hastalığın ortaya çıkışı, seyri, semptomları, etki alanları, yayılma hızı, kontrol ve en son tedavi yöntemlerini daha net anlayıp ortaya koyma hususundaki önemini kavramıştır.

Bernoulli'nin tüm dünyayı etkisi altına alan çiçek hastalığına karşı aşılama uygulamasını savunmak için oluşturduğu matematiksel model sonucunda yaşam belirtisinin 26 yıldan 29 yıla çıkabileceği bilimsel olarak ortaya konmuştur (Bernoulli,1766; Blower, 2004). 1906 yılında Hamer (Hamer, 1906) kızamık salgınlarının tekrarını incelemek üzere kesikli bir zaman modeli tasarlamış ve analiz etmiştir. Model birim zamanda ortaya çıkan yeni vaka sayısının, hastalığa duyarlı ve hastalık taşıyan bireylerin sayısına bağlı olduğunu varsayan ilk model olması nedeni ile önem taşımaktadır. Sıtma yeni vakaların sayısı ve kontrolü ile ilgilenen Ross (Ross, 1911), 1911 yılında diferansiyel eşitlik modeli geliştirmiştir. Salgın hastalıkların matematiksel modellenmesi, Kermack ve Mckendrick'in SIR modeliyle (Kermack, 1927) zirveye ulaşmıştır. Daha sonra SI, SIS, SEIR, SIRD, SEIRD, SEIQR, SVIR, MSEIR, MSEIRS (Ahmad, 2021; Akpınar, 2012; Ala'raj, 2021; Chatterjee, 2020; Çakan, 2021; Hethcote, 2000; Sahinbas, 2022) gibi daha bir çok model, bilim insanları tarafından ortaya konmuştur (Işık, 2020). Bulaşıcı hastalıklarla ilgili bu modellemelerde bireyler sınıflara ayrılarak yapılmıştır. Örneğin SEIR modelinde SEIR kelimesinin herbir harfi sırasıyla susceptible(duyarlı), exposed(maruz kalan), infected(enfekte olan), recovered(iyileşen veya vefat eden) bireylerin sınıflarını ifade eder.

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

1.1. Limit, Süreklilik, Türev

1.1.1. Limit

$f(x)$ fonksiyonu x_0 komşuluğunda (x_0 ' ı içeren veya içermeyen) bir açık aralıkta tanımlı olsun. x değerleri x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ değerlerinin yaklaştığı L sayısına $f(x)$ fonksiyonunun limiti denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

şeklinde yazılır. Bu şartı sağlamak için, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık gelen ve her x için

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

şartını sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut olmalıdır.

1.1.2. Süreklilik

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun. $y = f(x)$, $c \in (a, b)$ iç noktasında

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

şartını sağlarsa bu iç noktada süreklidir denir. Tanım aralığının uç noktalarında ise sırasıyla

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

eşitliklerini sağlaması durumunda f fonksiyonu tanım aralığının uç noktalarında süreklidir denir. Eğer bir fonksiyon tanım kümesinin tamamında sürekli ise bu fonksiyona sürekli fonksiyon denir.

1.1.3. Türev

f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$ ile gösterilir ve limitin var olması koşulu ile

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

olarak tanımlanır.

1.2. Özdeğer ve Özvektör

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere \mathbf{A} , $n \times n$ tipinde bir kare matris, \vec{v} $n \times 1$ tipinde bir vektör ve λ sabit bir sayı olmak üzere ;

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (1)$$

eşitliğini $\vec{v} \neq \vec{0}$ için sağlayan λ , \mathbf{A} 'nın özdeğeri, \vec{v} ise λ özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Buna göre \mathbf{I}_n $n \times n$ birim matris olmak üzere

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \implies \mathbf{A}\vec{v} = \lambda\mathbf{I}_n\vec{v} \implies \mathbf{A}\vec{v} - \lambda\mathbf{I}_n\vec{v} = 0 \implies (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\vec{v} = 0$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$ olmalıdır. $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$ denklemine \mathbf{A} 'nın karakteristik denklemi denir. Bu denklemin kökleri \mathbf{A} matrisinin özdeğerleridir. Herbir λ değeri için $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\vec{v} = 0$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı \vec{v} vektörleri ise \mathbf{A} 'nın özvektörleridir.

Örnek:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini ve her bir özdeğere karşılık gelen özvektörünü bulalım.

Çözüm: \mathbf{A} matrisinin karakteristik denklemi;

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olur. Determinant hesaplanıp düzenlenirse karakteristik denklem $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ olup \mathbf{A} 'nın öz değerlerini verecektir. $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için (1) denkleminde $\lambda = 1$ yazılıp elde edi-

len sistem çözüldüğünde $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\vec{v}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bulunur. Burada $t = 1$ alınırsa $\lambda_1 = 1$

özdeğerine karşılık gelen özvektör $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ elde edilir. Benzer şekilde $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ özde-

ğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ olacaktır.

1.3. Kısmi Türev Ve Zincir Kuralı

(x_0, y_0) noktasında iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri, limitlerin mevcut olması koşulu sırasıyla;

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - y_0)}{h}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 - y_0)}{h}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

$w = f(x, y)$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, eğer $x = x(t)$ ve $y = y(t)$, t 'nin türevlenebilir fonksiyonları iseler, $w = f(x(t), y(t))$ bileşkesi de t 'nin türevlenebilir bir fonksiyonudur ve

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

veya

$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

eşitlikleri ile verilir.

1.4. Taylor Serileri Ve Kesme Hatası

$a \in R$ olmak üzere eğer $f(x)$ ve ilk $(n + 1)$ türevi $[a, x]$ aralığını içeren bir aralıkta sürekli iseler

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots \quad (2)$$

sonsuz serisine $f(x)$ in $x = a$ noktası civarında Taylor Serisi adı verilir. a 'nın yakınında herhangi bir noktada $f(x)$ değerini hesaplamak istersek bu sonsuz seriyi belli bir terimde kesip, kestiğimiz noktadan sonraki terimleri ihmal etmemiz gerekir. İşte bu atılan terimler, yaptığımız hesaplamamızın hatası olarak kabul edilir. Yani bu seri $(x - a)^n$ li terime kadar (bu terim dahil) alınmış ise bu terimden sonraki terimlerin toplamı kesme hatası olacaktır. Bu durumda yukarıdaki sonsuz seri yerine n . dereceden Taylor polinomu olarak adlandırılan ve

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n$$

ifadesindeki ilk $(n + 1)$ e karşılık gelen sonlu toplam alınır. Burada R_n ifadesi kesme hatası olarak adlandırılır ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}, \quad \xi \in [a, x]$$

biçiminde ifade edilir. Herhangi bir x noktasında $R_n(x)$, ξ bilinmediğinden tam belirlenmesi zor bir ifadedir. Ancak;

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,x]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

R_n için bir üst sınır belirler.

Burada birbirine yakın iki nokta olan a ve x ; $a = x_i$, $x = x_{i+1}$ olarak alınıp Taylor serisini yeniden yazılırsa;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + R_n$$

olup;

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}, \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

elde edilir. Ayrıca $x_{i+1} - x_i = h$ tanımlanırsa;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

olup;

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

formunda da yazılabilir.

Eğer (2) Taylor serisinde $a = 0$ alınırsa bu durumda seri;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

formunda olup Maclaurin Serisi adını alır.

Örnek: Taylor serisi açılımını kullanarak $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ değerini $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ değeri yardımıyla Taylor serisinde sırasıyla bir, iki, üç ve dört terim alarak hesaplayınız?

Çözüm: $f(x) = \cos(x)$, $x_i = \left(\frac{\pi}{4}\right)$, $x_{i+1} = \left(\frac{\pi}{3}\right)$, $h = \left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{12}\right)$
 $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f'''(x) = \sin(x)$,

- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \sum_{n=0}^0 \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n!}h^n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071068$
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \sum_{n=0}^1 \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n!}h^n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{12} \approx 0,5219867$
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \sum_{n=0}^2 \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n!}h^n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{12} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \approx 0,4977544$

$$\bullet \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n!} h^n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{\pi}{12} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!} \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!} \left(\frac{\pi}{12}\right)^3 \approx 0,4998691$$

değerleri elde edilir. Dikkat edilirse n büyüdükçe $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$ gerçek değerine yaklaşılır.

Bununla birlikte birden fazla bağımsız değişken içeren fonksiyonlarda kısmi türevlerin var olması koşulu ile Taylor serisine açılabilir. Örneğin $a, b \in R$ olmak üzere $f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonunun (a, b) noktası civarında Taylor seri açılımı;

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \right] + \dots \quad (3)$$

formunda yazılır.

1.5. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Diferansiyel denklem; $y = f(x)$, belirli bir aralıkta türevleri var olan bir fonksiyon olmak üzere y nin tanımlı olan türevlerinden bir ya da birden fazlasını içeren denklemdir. Bir diferansiyel denklemin çözümünü bulmak ise bu denklemi verilen aralıkta sağlayan $y = f(x)$ fonksiyonun tespit edilmesidir.

1.5.1. Başlangıç değer problemleri

$y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemi, $x \in [x_0, b]$ olmak üzere $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu ile birlikte başlangıç değer problemi olarak tanımlanır.

Mertebesi m olan herhangi bir diferansiyel denklem m tane birinci mertebeden diferansiyel denklem içeren sisteme dönüştürülebilir. Bunun için m . mertebeden bir diferansiyel denklemi başlangıç koşullarıyla beraber ;

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) , \quad x \in [x_0, b]$$

$$y^{(p)}(x_0) = y_{0,p} , \quad p = 0, 1, 2, \dots, m - 1$$

formunda yazalım. Burada $y = v_1, y' = v_2, \dots, y^{(m-1)} = v_m$ değişkenleri tanımlanırsa yukarıdaki m . mertebeden başlangıç değer problemi;

$$\begin{array}{ll}
v'_1 = v_2 & v_1(x_0) = y_{0,0} \\
v'_2 = v_3 & v_2(x_0) = y_{0,1} \\
\vdots & \vdots \\
v'_{m-1} = v_m & v_{m-1}(x_0) = y_{0,m-2} \\
v'_m = f(x, v_1, v_2, \dots, v_m) & v_m(x_0) = y_{0,m-1}
\end{array}$$

m tane birinci mertebeden başlangıç değer probleminden oluşan bir sisteme dönüşür. Bu sistemi vektör formunda yazacak olursak;

$$\vec{V}' = \vec{F}(x, \vec{V}), \quad \vec{V}(x_0) = \vec{\eta} \quad (4)$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= [v_1, v_2, \dots, v_m]^T \\
\vec{F} &= [v_2, v_3, \dots, f(x, v_1, v_2, \dots, v_m)]^T \\
\vec{\eta} &= [y_{0,0}, y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,m-1}]^T
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla herhangi bir m . mertebeden başlangıç değer probleminin çözümü birinci mertebeden bir başlangıç değer probleminin çözümüne indirgenmiş olur. Bu nedenle tezde ele aldığımız modellerin sayısal çözümleri için birinci mertebeden bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümünü incelememiz yeterlidir. Sayısal çözüme geçmeden önce bu problemin çözümünün varlığını ve tekliğini ifade eden teoremi verelim.

Teorem:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

başlangıç değer problemi verilsin. Kabul edelim ki $f(x, y)$ aşağıdaki şartları sağlasın,

- $f(x, y)$ reel değerli bir fonksiyon,
- $f(x, y)$, $x \in [x_0, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $y \in (-\infty, \infty)$ bölgesinde ve sürekli
- Herhangi bir $x \in [x_0, b]$ için f ve $\frac{df}{dy}$ sınırlı olması ve herhangi iki y_1 ve y_2 için öyle bir L sayısı vardır ki;

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

sağlanır. Burada L ye Lipschitz sabiti denir.

Bu durumda herhangi bir y_0 başlangıç değeri için (5) başlangıç değer problemi $x \in [x_0, b]$ olmak üzere $y(x)$ tek çözümüne sahiptir.

Tezde incelediğimiz başlangıç değer problemleri için varlık ve teklik teoreminin sağlandığını ve $f(x, y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre gereken mertebeden kısmi türevlerinin var olduğunu kabul edeceğiz.

Şimdi çözümün varlık ve tekliğini verdiğimizize göre (5) başlangıç değer probleminin sayısal çözümünün nasıl elde edileceğini inceleyelim.

1.5.2. Taylor serisi yöntemi

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin sayısal çözümü için $y(x)$ çözüm fonksiyonunun x_0 noktası civarında Taylor serisi açılımını kullanacağız. Yani;

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \quad (6)$$

sonsuz serisinde istenildiği kadar terim alınarak $y(x)$ in yaklaşık çözümü elde edilir. Şimdi $x - x_0 = h$ dersek ve $y' = f(x, y)$ yi kullanırsak;

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \dots \quad (7)$$

elde edilir. Burada h adım aralığı olup soruda verilir ya da istenen değere göre belirlenir. $y(x_0)$ ve $y'(x_0)$ başlangıç değer probleminde verilmekte olup $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, ... değerleri ise $y' = f(x, y)$ denkleminin x e göre türevleri alınıp $x = x_0$, $y = y_0$ yazılarak bulunur. Yani;

$$y' = f(x, y) \longrightarrow y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y'' = f'(x, y) \longrightarrow y''(x_0) = f'(x_0, y_0)$$

$$y''' = f''(x, y) \longrightarrow y'''(x_0) = f''(x_0, y_0)$$

⋮

değerleri (7) de yerine yazılarak h a bağlı çözüm elde edilir. Burada istenildiği kadar terim alınabilir. Ancak çok sayıda terim almak, sayısal çözüm adım adım ilerleyeceği için işlem kalabalığına yol açar. Ayrıca küçük h değeri ile işlem yapmak doğruluğu artıran bir unsurdur. Bununla birlikte sonsuz terime sahip olan (7) ifadesini belirli bir terimde kesmek hata terimine yol açacaktır. Bu terim Taylor serisi açılımında belirtilen hata terimidir. Yani en son n . türevi içeren terim alındığında hata terimi $\xi \in (x_0, x_0 + h)$ olmak üzere $\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$ formunda olacaktır.

Örnek: $y' = -2x - y$, $y(0) = -1$ başlangıç değer probleminin çözümünü Taylor serisinde beş terim olarak bulunuz. Bu çözümde $h = 0,1$ kullanarak $y(0,1)$ değerini hesaplayınız?

Çözüm: $f(x, y) = -2x - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ için (7) ün ilk beş terimini alıp verilen değerleri yerine yazarsak; $\xi \in (0, h)$ olmak üzere

$$y(x_0 + h) = y(h) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2!}y''(0) + \frac{h^3}{3!}y'''(0) + \frac{h^4}{4!}y^{(iv)}(0) + \frac{h^5}{120}y^{(v)}(\xi)$$

formunda olacaktır. O halde $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{(iv)}(0)$ değerlerini bulalım.

$$y' = f(x, y) = -2x - y, y(0) = -1$$

$$y'(0) = f(x_0, y_0) = f(0, -1) = -2 \times 0 - (-1) = 1$$

$$y''(x) = f'(x, y) = -2 - y'$$

$$y''(0) = f'(x_0, y_0) = f'(0, -1)$$

$$y''(0) = -2 - y'(0) = -2 - 1 = -3$$

$$y'''(x) = -y''$$

$$y'''(0) = -y''(0) = 3$$

$$y^{(iv)}(x) = -y'''$$

$$y^{(iv)}(0) = -y'''(0) = -3$$

Bulduğumuz bu değerleri $y(h)$ da yerine koyarsak; $x_0 = 0$ dan h uzaklıktaki bir noktada çözüm;

$$y(h) \approx -1 + h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{8}h^4$$

elde edilir. $y(0,1)$ çözümü bulmak için $h = 0,1$ alırsak;

$$y(0,1) \approx -1 + 0,1 - \frac{3}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{2}(0,1)^3 - \frac{1}{8}(0,1)^4 \approx -0,91451$$

elde ederiz. Burada hata h a bağlıdır. h küçük ise hata daha küçük, dolayısıyla çözüm daha doğru olur. Örneğin çözümün $x = 1$ deki $y(1)$ değerini $h = 1$ alıp hesaplamak hatanın büyümesine yol açar. Bu nedenle $y(1)$ i hesaplamak için örneğin; $h = 0,5$ alınıp önce $y(0,5)$ bulunur, sonra aynı işlemler; $y' = f(x, y)$, $y(0,5) = y_1$ başlangıç değer problemine uygulanır. Bu ise Taylor serisinde çok terim alınması durumunda işlem fazlalığı anlamına gelir. Bu nedenle Taylor serisinde az terim alıp küçük h artması yapmak işlem kolaylığı sağlar. İşte Taylor serisinde iki terim alınırsa Euler metodu elde edilir.

1.5.3. Euler metodu

Taylor serisi açılımında yalnızca ilk iki terimi alırsak $\xi \in (x_0, x_0 + h)$, yani;

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + HATA$$

$$HATA = \frac{h^2}{2!} y''(\xi)$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf(x_0, y_0) \quad (8)$$

elde edilir. Şimdi çözümü adım adım yazacağımızı düşünürsek; (8) ifadesi,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

formunda olan EULER METODU formülasyonuna dönüşür. Burada herbir adımda hatalar giderek artacağından büyük h değerleri için metod iyi sonuç vermez. h küçük seçildikçe Euler metodu daha iyi sonuç verir.

Örnek: $y' = \frac{x-y}{2}$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemini $h = 1$ olarak $[0, 3]$ aralığında çözelim.

Çözüm: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x, y) = \frac{x-y}{2}$, $f(x_n, y_n) = \frac{x_n - y_n}{2}$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{x_n - y_n}{2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

• $h = 1$ için

$$n = 0 \text{ ise } y_1 = y(1) = y_0 + 1 \left(\frac{x_0 - y_0}{2} \right) = 1 + \frac{0-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 1 \text{ ise } y_2 = y(2) = y_1 + 1 \left(\frac{x_1 - y_1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{0-\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$n = 2 \text{ ise } y_3 = y(3) = y_2 + 1 \left(\frac{x_2 - y_2}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{2-\frac{3}{4}}{2} = \frac{11}{8}$$

0 halde sonuç olarak çözümü $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ noktalarında hesaplamış olduk.

• $h = \frac{1}{2}$

$$n = 0 \text{ ise } y_1 = y(0,5) = y_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - y_0}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{0-1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$n = 1 \text{ ise } y_2 = y(1) = y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - y_1}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{0,5-\frac{3}{4}}{2} \right) = 0,6875$$

$$n = 2 \text{ ise } y_3 = y(1,5) = y_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - y_2}{2} \right) = 0,6875 + \frac{1}{2} + \frac{1-0,6875}{2} = 0,7656$$

$$n = 3 \text{ ise } y_4 = y(2) = y_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_3 - y_3}{2} \right) = 0,7656 + \frac{1}{2} + \frac{1,5-0,7656}{2} = 0,9412$$

$$n = 4 \text{ ise } y_5 = y(2,5) = y_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_4 - y_4}{2} \right) = 0,9412 + \frac{1}{2} + \frac{2-0,9412}{2} = 1,2119$$

$$n = 5 \text{ ise } y_6 = y(3) = y_5 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_5 - y_5}{2} \right) = 1,2119 + \frac{1}{2} + \frac{2,5-1,2119}{2} = 1,5339$$

0 halde;

$h = 1$ için $y(3) = 1,375$ ($y(3)$ 3 adımda bulunur)

$h = 0,5$ için $y(3) = 1,5339$ ($y(3)$ 6 adımda bulunur)

$h = 0,25$ için $y(3) \cong 1,6043$ ($y(3)$ 12 adımda bulunur)

$h = 0,125$ için $y(3) \cong 1,6374$ ($y(3)$ 24 adımda bulunur)

$y(3)$ ün gerçek değeri ise $y(3) = 1,669390$ dır. Yani h küçüldükçe gerçek değere yaklaşılr. Ancak bu da adım sayısını arttıracaktır. Dolayısıyla Euler metodundan daha iyi sonuçlar verecek metotlara ihtiyaç vardır. Heun's Metodu, Runge-Kutta Metodları bu tip metotlardır.

1.5.4. Yerel hata

x_{i-1} noktasındaki gerçek değer $y(x_{i-1})$ değerinin kullanıldığı kabul edilerek, $x_i = x_{i-1} + h$ noktasındaki değer hesaplanırken oluşan hataya (gerçek çözüm ile ilgili yaklaşım arasındaki farka) sayısal yöntemin x_i noktasındaki yerel hatası adı verilir. $E_{yerel}(x_i, h)$ ile gösterilir ve $y(x_i)$ gerçek değer ve y_i hesaplanan yaklaşık değer olmak üzere; $E_{yerel}(x_i, h) = y(x_i) - y_i$ ile ifade edilir. Bu hata tek bir noktadaki hatayı ifade eder.

Örnek: (Euler Metodunda Yerel Hata): $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $a \leq x_0 \leq b$ başlangıç değer problemi Euler metodu ile çözüldüğünde yerel hatayı inceleyelim.

Çözüm: $E_{yerel}(x_i, h) = y(x_i) - [y(x_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y_{i-1})]$ olduğundan $y(x_i)$, $x = x_{i-1}$ noktasında Taylor serisine açılıp son eşitlikte yerine yazılırsa, $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} E_{yerel}(x_i, h) &= y(x_{i-1}) + hy'(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi) - y(x_{i-1}) - hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ &= \frac{h^2}{2!}y''(\xi) = O(h^2) \end{aligned}$$

olur.

1.5.5. Kümülatif hata

x_i noktasındaki kümülatif hata ise x_1 noktasından başlayarak x_i noktasına kadar yapılan hataların toplamı olarak tanımlanır. $E(x_i, h)$ ile gösterilir ve $y(x_i)$ nin sayısal metod ile hesaplanan değeri Y_i olmak üzere; $E(x_i, h) = Y_i - y(x_i)$ olur.

Örnek: (Euler Metodunda Kümülatif Hata): $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $a \leq x_0 \leq b$ başlangıç değer problemi Euler metodu ile çözüldüğünde kümülatif hatayı inceleyelim.

Çözüm: Euler metodunda x_i de oluşan kümülatif hatayı hesaplamak için $[x_0, x_i]$ aralığını $h = \frac{x_i - x_0}{i}$ uzunluklu i adet alt aralığa bölelim. Bu durumda, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ olmak üzere x_i nokta-

sındaki kümülatif hata;

$$\begin{aligned} E(x_i, h) &= \sum_{j=1}^i E_{yerel}(y, x_j, h) \\ &= \frac{h^2}{2!} y''(\xi_1) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi_2) + \dots + \frac{h^2}{2!} y''(\xi_i) \\ &= \frac{h}{2} \frac{x_i - x_0}{i} \sum_{j=1}^i y''(\xi_j) \\ &= \frac{h}{2} (x_i - x_0) y''(\xi) = (h) \end{aligned}$$

olur. Burada sürekli fonksiyonlar için (y'' nün sürekli olduğunu kabul edilmek şartıyla) ara değer teoremini kullanarak $y''(\xi) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i y''(\xi_j)$ sağlanacak biçimde en az bir $\xi \in (x_0, x_i)$ noktasının var olduğunu kullandık.

Dolayısıyla Euler metodunda yerel hata (h^2) mertebesinde iken kümülatif hata her adımda biriken hatalar nedeniyle (h) mertebesine düşer.

1.5.6. Heun metodu

Euler metodunda ele edilen değerlerin düzeltilmesiyle oluşur. Bu nedenle tahmin et- düzelt (predictor-corrector) tipinde bir metoddur. İki adımdan oluşur: Birinci adımda Euler metodu ile bir sonuç elde edilir (tahmin adımı), ikinci adımda ise istenildiği kadar düzeltme yapılır (düzeltme adımı).

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin Heun metodu ile çözümünün adımları aşağıdaki gibidir.

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \longrightarrow \text{tahmin adımı (Euler)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)})] \longrightarrow \text{düzeltme adımı}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Burada düzeltme adımlarının sayısını veren k iterasyonu ardışık düzeltme adımları arasındaki fark belli bir $\varepsilon > 0$ değerinden küçük kalana kadar veya belirli bir değere kadar devam ettirilir.

Örnek: $y' = \frac{x-y}{2}$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminde $h = \frac{1}{4}$ alıp $y(0, 5)$ değerini her bir adımda iki düzeltme yapıp Heun's metodu ile hesaplayınız.

Çözüm:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{1}{4} \left(\frac{x_n - y_n}{2} \right), n = 0, 1$$

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{1}{8} \left[\frac{x_n - y_n}{2} + \frac{x_{n+1} - y_{n+1}^{(k-1)}}{2} \right], k = 1, 2$$

$n = 0$ için

$$y_1^{(0)} = y_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{x_0 - y_0}{2} \right) = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{0 - 1}{2} \right) = 0,875$$

- $k = 1$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{1}{8} \left[\frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{x_1 - y_1^{(0)}}{2} \right] = 1 + \frac{1}{8} \left[\frac{0 - 1}{2} + \frac{0,25 - 0,875}{2} \right] = 0,8984$$

- $k = 2$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{1}{8} \left[\frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{x_1 - y_1^{(1)}}{2} \right] = 1 + \frac{1}{8} \left[\frac{0 - 1}{2} + \frac{0,25 - 0,8984}{2} \right] = 0,8969$$

elde edilir. Burada $y(0,25) = y_1 \approx 0,89$ alalım. ($y_1 = y_1^{(2)} = 0,8969$ da alınabilir.)

$n = 1$ için

$$y_2^{(0)} = y_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x_1 - y_1}{2} \right) = 0,89 + \frac{1}{4} \left(\frac{0,25 - 0,89}{2} \right) = 0,81$$

- $k = 1$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{1}{8} \left[\frac{x_1 - y_1}{2} + \frac{x_2 - y_2^{(0)}}{2} \right] = 0,89 + \frac{1}{8} \left[\frac{0,25 - 0,89}{2} + \frac{0,5 - 0,81}{2} \right] \approx 0,8306$$

- $k = 2$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{1}{8} \left[\frac{x_1 - y_1}{2} + \frac{x_2 - y_2^{(1)}}{2} \right] = 0,89 + \frac{1}{8} \left[\frac{0,25 - 0,89}{2} + \frac{0,5 - 0,8306}{2} \right] = 0,8293$$

elde edilir. Bu ise $y(0,5)$ değerini verir. O halde $y(0,5) \approx 0,8293$ olacaktır.

1.5.7. Runge kutta metotları

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin sayısal çözümlerini daha iyi doğrulukta elde etmek için Taylor serisinden fazla terim alınması mantığına dayanan metotlardır.

$$K_i = hf(x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j), \quad c_1 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \nu$$

tanımlaması yapılırsa

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1)$$

$$K_3 = hf(x_n + c_3 h, y_n + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$$

$$K_4 = hf(x_n + c_4 h, y_n + a_{41} K_1 + a_{42} K_2 + a_{43} K_3)$$

⋮

olacaktır. Bu değerler yardımıyla belirlenen noktalarda yaklaşık çözümler

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} w_i K_i$$

yardımıyla elde edilir ki burada $c_2, c_3, \dots, c_\nu, a_{2j}, \dots, a_{\nu(\nu-1)}$ ve w_i reel parametrelerdir.

1.5.8. İkinci mertebeden runge kutta

$$\begin{aligned}
 K_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 K_2 &= hf(x_n + c_2h, y_n + a_{21}K_1) \\
 y_{n+1} &= y_n + w_1K_1 + w_2K_2
 \end{aligned} \tag{9}$$

formunda olup dört tane c_2, a_{21}, w_1 ve w_2 reel parametrelerini içerir. Bu parametrelerin belirlenebilmesi (9) ifadesinde iki değişkenli K_2 fonksiyonu (x_n, y_n) noktası civarında (3) Taylor serisine açılır ve yerine yazılır. Ayrıca K_1 ve K_2 de $f(x_n, y_n) = f_n$ kısaltması kullanılırsa, yani;

$$\begin{aligned}
 K_1 &= hf_n \\
 K_2 &= hf(x_n + c_2h, y_n + a_{21}hf_n) \\
 &= h[f_n + (c_2hf_x + a_{21}hf_n f_y) + \frac{1}{2!}(c_2^2h^2f_{xx} + 2c_2a_{21}h^2f_n f_{xy} + a_{21}^2h^2f_n^2f_{yy}) + \dots] \\
 &= hf_n + h^2(c_2f_x + a_{21}f_n f_y) + \frac{1}{2}h^3(c_2^2f_{xx} + 2c_2a_{21}f_n f_{xy} + a_{21}^2f_n^2f_{yy}) + \dots
 \end{aligned}$$

ifadeleri (9) da yerlerine yazılırsa

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2)hf_n + h^2(w_2c_2f_x + w_2a_{21}f_n f_y) + \frac{1}{2}h^3w_2(c_2^2f_{xx} + 2c_2a_{21}f_n f_{xy} + a_{21}^2f_n^2f_{yy}) + \dots \tag{10}$$

ifadesi elde edilir. Bununla birlikte $y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(x_n + h)$ ifadesi $x = x_n$ noktasında Taylor serisine açılırsa;

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \dots \tag{11}$$

elde edilir. Burada başlangıç değer problemindeki iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x, y) = f \\
 y'' &= f_x + f f_y \\
 y''' &= f_{xx} + 2f f_{xy} + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f f_y) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

türevleri (x_n, y_n) noktasında yazılırsa (11) ifadesi

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf_n + \frac{h^2}{2!}(f_x + f_n f_y) + \frac{h^3}{3!}[f_{xx} + 2f_n f_{xy} + f_{yy}f_n^2 + f_y(f_x + f_n f_y)] + \dots \tag{12}$$

formuna getirilir. Şimdi (10) ve (12) denklemlerinde h^3 lü terime kadar olan katsayılarının eşitlenmesi yardımıyla;

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ c_2 w_2 &= \frac{1}{2} \\ a_{21} w_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

denklemleri elde edilir. Burada h^3 lü terim hata analizi için gereklidir.

Dört bilinmeyen ve üç denklemden oluşan (13) sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olacaktır. Bu çözümleri elde etmek için bilinmeyenlerden birine sıfırdan farklı keyfi değer vererek diğer bilinmeyenler hesaplanabilir. Bunun için c_2 parametresi keyfi alınıp diğer bilinmeyenler c_2 cinsinden yazılırsa ;

$$\begin{aligned} a_{21} &= c_2 \\ w_2 &= \frac{1}{2c_2} \\ w_1 &= 1 - \frac{1}{2c_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Örneğin $c_2 = \frac{2}{3}$ alınırsa, $a_{21} = \frac{2}{3}$, $w_1 = \frac{1}{4}$ ve $w_2 = \frac{3}{4}$ bulunur. Bu parametrelerle yazılan ikinci mertebeye Runge Kutta metodu;

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n) \\ K_2 &= hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}K_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}(K_1 + 3K_2) \end{aligned}$$

formunda olur. Bu metot Optimal RK2 metodu olarak adlandırılır.

Taylor serilerinde daha fazla terimler alınmak suretiyle yüksek mertebeden(üçüncü ve dördüncü) Runge Kutta Metodları elde edilebilir. Bunun için Runge Kutta Metodlarının genel formülü üçüncü mertebeden Runge Kutta Metodu için K_1 , K_2 ve K_3 terimleri kullanılarak, dördüncü mertebeden Runge Kutta Metodu ise K_1 , K_2 , K_3 ve K_4 terimleri kullanılarak aşağıdaki formlarda yazılabilir.

1.5.9. Üçüncü dereceden runge kutta

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n) \\ K_2 &= hf(x_n + c_2h, y_n + a_{21}K_1) \\ K_3 &= hf(x_n + c_3h, y_n + a_{31}K_1 + a_{32}K_2) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + w_1K_1 + w_2K_2 + w_3K_3$$

1.5.10. Dördüncü mertebeden runge kutta

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + c_2h, y_n + a_{21}K_1)$$

$$K_3 = hf(x_n + c_3h, y_n + a_{31}K_1 + a_{32}K_2)$$

$$K_4 = hf(x_n + c_4h, y_n + a_{41}K_1 + a_{42}K_2 + a_{43}K_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + w_1K_1 + w_2K_2 + w_3K_3 + w_4K_4$$

Buradaki parametreler ikinci mertebeden Runge Kutta metodunun katsayılarının elde edilmesinde kullanılan prosedür yardımıyla elde edilebilir.

2. BÖLÜM

MODELLER

2.1. SIR Modeli

Bir salgın hastalığın yayılmasını matematiksel olarak ifade etmek için McKendrick ve Kermack 1927 yılında **SIR** adı verilen modeli oluşturmuşlardır (Kermack, 1927). Bu model, teknik bakımdan bir diferansiyel denklem sistemini içermekle beraber değişik zamanlarda farklı hastalıklar için kullanılmıştır. Toplumun üç bölüme ayrıldığı bu modelde hastalığın ilerleyici doğası nedeniyle t bağımsız değişken olup bağımlı değişkenleri S, I, R aşağıdaki gibi tanımlanır;

S (Susceptible): t anında hastalığı kapmaya duyarlı olan kişi sayısı

I (Infected): t anında enfekte olmuş ve hastalığı duyarlı bireylere bulaştırabilcek kişi sayısı

R (Recovered): Hastalığı başkalarına bulaştıramayanlar, iyileşenler veya vefat eden kişi sayısı

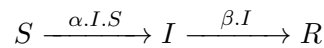
α : Hastalığın bulaşma oranı, $\alpha > 0$

β : Hastalığın iyileşme oranı, $\beta > 0$

Modelin kurulmasında;

- α ve β parametrelerinin hastalık boyunca sabit alındığı ve her toplumun yapısına göre de farklılık gösterebileceği,
- İç ve dışa göçlerin olmadığı, hastalık dışı doğum ve ölümlerin sayılmadığı, değişmeyen bir nüfusun olduğu,
- İyi karışmış, homojen bir toplum yani toplumdaki bireylerin birbirleriyle eşit oranda kontak halinde olduğu,
- Tam bağışıklık (kalıcı bağışıklık) kazanıldığı, hastalığa yakalanan bireyin iyileştikten sonra bir daha aynı hastalığa yakalanmayacağı ,
- Enfekte bireyin hastalığı hemen bulaştırdığı, kuluçka döneminin olmadığı,

varsayımları kabul edilmiştir. SIR modelinde her bir bağımlı değişkeninin değişim oranlarını,



şeması yardımıyla aşağıdaki diferansiyel denklem sistemiyle tanımlayabiliriz:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha I(t)S(t) \quad (14)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I(t)S(t) - \beta I(t) \quad (15)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t) \quad (16)$$

Sol taraftaki $\frac{dS}{dt}$, $\frac{dI}{dt}$ ve $\frac{dR}{dt}$ terimleri, S , I ve R sayılarının olabildiğince sık zaman aralıklarıyla ölçülerek belirlenebilecek artış veya azalma hızlarını verir. Türevli bu ifadeler pozitif olursa artış, negatif olursa azalış ifade eder. Sağ tarafta α, β katsayıları pozitif sayılar olduğundan (-) işaretli terimler azalmaya, (+) işaretli terimler artışa katkı yapar.

Enfekte kişilerin sayısının zamanla artma hızı, enfekte olmuş bireylerin hastalığı kapmaya duyarlı bireylerle yakınlaşmasına bağlıdır. Bu durum duyarlı bireylerin sayısı (S) ile enfekte bireylerin (I) sayısının çarpımı ile orantılıdır. Tersine olan durumlarda duyarlı birey (S) sayısının zamanla azalma hızı, enfekte olmalarıyla orantılıdır.

Denklem (14), duyarlı bireylerin sayısının hastalığın büyüme hızı ile orantılı olarak azaldığını gösterir. Böylelikle $S(t)$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. (15) numaralı denkleme göre hasta sayısının değişim hızında iki etken vardır. Bunlardan birincisi duyarlı bireylerin hasta bireylerle etkileşime girip hasta bireylerin sayısını artırması, diğeri ise hastalıktan iyileşerek ya da vefat ederek hasta bireylerin sayısının azalmasıdır. Birinci etmendeki duyarlı bireylerin hasta olmasından kaynaklanan artış hem S hem de I 'ya bağlıdır. Bunu dengeleyen ikinci etmen ise hastalıktan kurtulan ve başka insanları hasta edemeyecek bireylerin etkisi olarak yorumlanabilir. Bu azalış ise yine I 'ya bağlıdır.

Son olarak iyileşen bireylerin değişim hızını ifade eden (16) türevi, enfekte bireylerin sayısı ile orantılı olup, $\beta > 0$ olmasından dolayı $R(t)$ 'nin artan fonksiyon olduğunu belirtir.

2.1.1. SIR modelin analitik çözümü

SIR modelindeki denklemlerin çözümünde sayısal yöntemler kullanılabilirdiği gibi analitik bir çözüm de elde etmek mümkündür (Harko, 2014). Buna göre SIR modelinde (14) denklemde I 'yı yalnız bırakıp bir kere daha I 'nin t ye göre türevi alındığında

$$I = -\frac{1}{\alpha} \frac{S'}{S} \quad (17)$$

$$I' = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S} \right)^2 \right] \quad (18)$$

denklemleri elde edilir. Bu elde ettiğimiz son iki denklem (15) de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2 - \alpha S' + \beta \frac{S'}{S} = 0 \quad (19)$$

denkleme ulaşılır. Ardından (16)'te I yerine (17) denklemindeki ifadesi yazıldığında

$$R' = -\frac{\beta S'}{\alpha S} \quad (20)$$

elde edilir. Burada her iki tarafının t ye göre integrali alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S = S_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} R\right)$$

elde edilir. Sırasıyla bu son eşitliğin ve (20) denkleminin t ye göre türevleri alınırsa

$$S' = -\frac{S_0 \alpha}{\beta} R' \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} R\right) \quad (21)$$

ve

$$R'' = -\frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2 \right] \quad (22)$$

eşitliklerine ulaşılır. (20) ,(21) ve (22), (19) denkleminde kullanılırsa

$$-\frac{\alpha}{\beta} R'' + \frac{\alpha^2}{\beta} R' S_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} R\right) - \beta R' = 0 \quad (23)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi bulunur. Bu formülasyonda

$$u(t) =: \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} R(t)\right) \quad (24)$$

bağımlı değişken dönüşümü yardımıyla

$$R' = -\frac{\beta u'}{\alpha u}$$

$$R'' = -\frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 \right]$$

türevleri ve tanımlanan yeni bağımlı değişken $u(t)$, (23) denkleminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$u''(t) - \frac{(u')^2}{u} = \left(-\beta + \alpha S_0 u\right) u'$$

diferansiyel denkleme ulaşılır. Bu diferansiyel denklem, uygulayacağımız

$$\phi = \frac{1}{u'(t)} \quad (25)$$

dönüşümü ve $\frac{d}{dt}u'(t) = -\frac{\phi'(u)}{\phi(u)^3}$ eşitliği yardımıyla

$$\phi' + \frac{1}{u}\phi = (\beta - \alpha S_0 u)\phi^2$$

bağımlı değişkeni ϕ , bağımsız değişkeni u olan Bernoulli denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü için $v = \phi^{-1}$ dönüşümü uygulanır. Bu dönüşümden $v' = -\phi^{-2}\phi'$ yardımıyla gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-v'\phi^2 + \frac{1}{u}\phi = (\beta - S_0\alpha u)\phi^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin her iki yanını $\frac{1}{\phi}$ ile çarpılırsa

$$-v'\phi + \frac{1}{u} = (\beta - S_0\alpha u)\phi^1$$

denkleme ulaşılır ve bu denklemde $\phi = \frac{1}{v}$ yazıldığında ve denklemin her iki yanını $-v$ ile çarpıldığında

$$v' - \frac{1}{u}v = -(\beta - S_0\alpha u)$$

lineer denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem integral çarpanı bulunup, aşağıdaki adımlar izlenerek çözüldüğünde C integral sabiti olmak üzere

$$\underbrace{u'(v' - \frac{1}{u}v)} = -u^{-1}(\beta - S_0\alpha u)$$

$$(u^{-1}v)' = -u^{-1}(\beta - S_0\alpha u)$$

$$\int (u^{-1}v)' = \int -u^{-1}(\beta - S_0\alpha u)$$

$$u^{-1}v = -\beta \ln u + S_0\alpha u + C$$

$$v = u(-\beta \ln u + S_0\alpha u + C)$$

çözümüne ulaşılır. Buradan Bernoulli denkleminin çözümünde kullanılan $v = \phi^{-1}$ dönüşümü ve (25) yardımıyla sırasıyla

$$\phi = \frac{1}{u(C - \beta \ln u + S_0\alpha u)}$$

ve

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\xi(C - \beta \ln \xi + S_0\alpha \xi)}$$

çözümleri bulunur. Burada t_0 integral sabiti olup sıfır alınabilir. Buna göre u , (24) ile tanımlanan bir parametre olmak üzere (14)-(16) SIR denklem sisteminin analitik çözümleri

$$S = S_0 u$$

$$I = \frac{\beta}{\alpha} \ln u - S_0 u - \frac{C}{\alpha}$$

$$R = -\frac{\beta}{\alpha} \ln u$$

parametrik formlarında elde edilir.

2.2. SI Modeli

Toplumun duyarlı bireyler ve enfekte olmuş bireyler olarak ikiye ayrıldığı matematiksel modeldir (Ahmad, 2021). Duyarlı birey, enfekte olmuş bireyle temas ettiğinde enfekte olur. Enfekte olan birey de hep enfekte kalır. Bu modelde de toplumdaki doğum ve ölüm oranları dikkate alınmadığı, kapalı bir toplum olarak kabul edilir. Tedavisi mümkün olmayan hastalıklar için kullanılır. AIDS buna bir örnektir. Modelin şema ile gösterimi ve modeli ifade eden diferansiyel denklem sistemi

$$S \xrightarrow{\alpha \cdot I \cdot S} I$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha I(t)S(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I(t)S(t)$$

formundadır.

2.3. SIS Modeli

Tam bağışıklığın kazanılmadığı hastalıkları modellemede kullanılır. Enfekte birey hastalıktan kurtulduktan sonra kalıcı bağışıklık kazanmadığı için bu hastalığa karşı tekrar duyarlı hale gelmesidir (Çakan, 2021). SIS modelinde de SI modelinde olduğu gibi toplumda doğum ve ölüm oranları dikkate alınmamıştır (Ahmad, 2021). SIR modelinden farklı olarak SIS modelinde iyileşme, iyileşen bireylerin iyileşme süresi çok kısa süreli olduğundan tam bir iyileşme olarak kabul edilmez. Bakteriye hastalıklar bunlara örnektir. Modelin şema ile gösterimi ve modeli ifade eden diferansiyel denklem sistemi

$$S \xrightarrow{\alpha \cdot I \cdot S} I \xrightarrow{\beta \cdot I \cdot S} S$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha I(t)S(t) + \beta I(t)I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I(t)S(t) - \beta I(t)I(t)$$

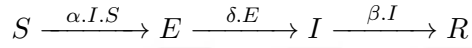
formundadır.

2.4. SEIR Model

SIR modelindeki enfekte bireylerin hastalığı hemen bulaştırması varsayımı, her durumda geçerli değildir. COVID-19 gibi bazı hastalıklar, vücuda girdiği an hastalık belirtilerinin ortaya çıkması ve hastalığın başkalarına bulaşması için belirli bir inkübasyon periyodu (kuluçka süresi) gereklidir. O halde SIR modeline S ve I arasına yani duyarlı bireyin hastalık bulandıktan sonra, hastalık belirtilerinin başlaması ve mikrobun başka bireye bulaşabilecek düzeye gelmesi için geçen süreyi ifade eden E ekleyerek yeni **SEIR** modeli oluşturulur (Sahinbas, 2022). SEIR modelinde SIR modelindeki tanımlara ek olarak modelimize bazı yeni tanımlar eklenir

E (Exposed) : t anında enfekte olmuş ama henüz bulaşıcı olmayan kişi sayısı,

δ : Kuluçka oranı $\delta > 0$ olmak üzere modeli;



şeması ile gösterebiliriz. Buna göre **SEIR** modeli ifade eden diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha I(t)S(t) \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha I(t)S(t) - \delta E(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E(t) - \beta I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I(t)\end{aligned}$$

formundadır. **SEIR** modelinde kuluçka dönemi hastalığın bulaşma süresini geciktirdiğinden hastalığın yayılma hızı SIR modeline göre daha yavaştır.

2.5. SIRD Modeli

SIR modelinde enfekte olmuş bireylerin hastalığı iyileşerek ya da vefat ederek artık bulaştıramayanların oluşturduğu R grubu, SIR modelinden farklı olarak **SIRD** modelinde vefat edenler ve iyileşenler olarak ayrı ayrı ele alınır. Yani enfekte olmuş hastalar iyileşerek (R) ya da vefat ederek (D) gruptan ayrılmış olurlar (Chatterjee, 2020).

Bu model;

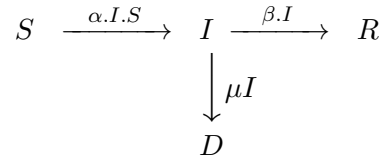
$R(t)$: İyileşen kişi sayısı

$D(t)$: Hastalıktan vefat eden kişi sayısı

β : Hastalığın iyileşme oranı

μ : Hastalıkta ölüm oranı

parametreleri yardımı ile



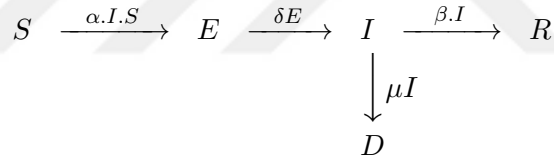
şeması kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\alpha I(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha I(t)S(t) - \beta I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I(t) \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I(t) \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi ile temsil edilir.

2.6. SEIRD Modeli

SIR modeline kuluçka döneminin (E) dahil olduğu, iyileşen (R) ve vefat edenlerin (D) ayrı ayrı değerlendirildiği yeni modelimiz **SEIRD** modelidir (Ala'raj, 2021). Bu model de aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini içermektedir.



$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\alpha I(t)S(t) \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha I(t)S(t) - \delta E(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E(t) - \beta I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I(t) \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I(t) \end{aligned}$$

Buraya kadar ifade edilen bu modeller en temel değişkenleri içeren modeller olarak düşünülebilir. Bununla birlikte bağışıklık, karantina, aşı, mevsimsel etki, göç, vb... etmenlerin ilave değişkenler olarak alındığı ve bu temel modellere eklendiği yeni modeller oluşturulabilir (Menon, 2020). Tezin ilerleyen bölümlerinde aşının da içinde bulunduğu bir model kullanılarak hastalığın azalmasında aşının etkisi incelenecektir.

3. BÖLÜM

MATEMATİKSEL MODELLERE ETKİ EDEN FAKTÖRLER VE TEMEL ÜREME SAYISI (R_0)

Salgın hastalıkların modellenmesinde hastalığın çeşidi ve seyrine göre birtakım faktörler devreye girmektedir. Bu faktörler hastalığın yayılımında artış ve azalışlara sebebiyet vereceğinden, modelin içerisine katılması belirli parametreler yardımıyla sağlanabilir. Kapanma stratejileri, kapanmalardaki ihlaller, karantina ve test süreçleri, seyahat veya göç stratejileri, testlerin güvenilirliği, mutasyonlar, aşı ve tedavi çeşitleri bu faktörlere örnek verilebilir. Şimdi bu faktörleri kısaca inceleyelim.

3.1. Kapanma Stratejileri

Kapanmaların vakalar üzerindeki etkileri araştırılmıştır (Menon, 2020). Bu çalışmada α parametresi kişiler arası etkileşimi temsil etmektedir. Kapanma olmadan önce α için belirlenen değer α_{max} . iken kapanmada insanlar arası etkileşimin azalması, enfekte ve duyarlı kişiler arasındaki temasın azalması ile α değeri α_{min} . 'e düşmektedir. Kapanma durumunda salgının zirve yapması gecikir. Periyodik kapanmada ise hastalığın aralıklarla duyarlı kişilere bulaştığı görülmüştür.

Kapanmada kabul edilen varsayımlar:

- Hedef bölgedeki tüm sistem aynı anda kapanır.
- Kapanma bitiminde en az 1 kişi bulaşıcı olmaya devam eder.
- Kapanmada hiç bir ihlal yapılmamıştır.
- Kapanma süresince seyahatler tamamen kısıtlanmıştır.

Devletler, hastalığın ilerleme hızına göre bu ilerlemeyi yavaşlatmak amacıyla kapanmadan yararlanırlar. Bu kapanma evresi, kapanma sonrasında yaşanabilecek olası enfekte insan sayısındaki artışı sonucu oluşabilecek krizin önüne geçme noktasında tıbbi eksikliklerin giderilmesi bakımından bir fırsat olarak görülmektedir. Çeşitli kapanma yöntemleri bulunmaktadır. Bunlardan biri belirli süreli kapanma diğeri ise sonlanacağı tarihin belirtilmediği süresiz kapanmadır. Süreli kapanma, sadece hastalığın zirve yapmasını geciktirirken süresiz kapanmalar da hastalığın tamamen ortadan kalkmasını sağlayabilmektedir. Ancak süresiz kapanmanın ekonomik yönden de bir çöküşe sebebiyet verme olasılığı bu yöntemin uygulanabilirliğini mümkün kılmamaktadır.

3.1.1 Periyodik kapanma

Periyodik kapanma modelinde belirli sayıdaki gün kapanmanın ardından yine belirli sayıda gün açılma uygulanır. Bu süreç periyodik olarak devam ettirilir. Bu modelle ekonominin tamamen durmasının önüne geçmek amaçlanmaktadır. Uzun süre uygulandığında ise hastalığı tamamen ortadan kaldıracak varsayılmaktadır. Ancak uzun süreli bir uygulama ekonomik yönden pra-

tik ve mümkün değildir. Periyodik kapanma uygulamasında meydana gelebilecek bir düzensizlik, salgının ikinci dalga olarak ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Bu sebeple bu modelin tek başına işe yaramayacağı öngörülmektedir. Diğer bir kapanma modeli de vaka sayısı belli bir eşiği aştığında uygulanan modeldir. Bu model, vaka sayısında büyük artışlar olmadan uygulandığı için yeterli sağlık hizmeti sunulması noktasında büyük bir avantaj sağlar. Yukarıdaki varsayımlar bu model için de geçerlidir.

3.2. Kapanmadaki İhlal

Sokağa çıkma yasakları, salgının zirve yapmasını geciktirerek devletlerin salgında kullanılacak tesisleri kurması için gerekli zamanı kazanmalarını sağlar. Bireylerin bir kısmının bu yasakları ihlal etme olasılığı göz önünde bulundurulmalıdır. Bu ihlallerin de hesaba katılması için kapanma anında, belirlenen α bulaşma katsayısının değişen periyodik bir fonksiyon olarak ele alınması düşünülmüştür. (Menon, 2020) çalışmasında

$$\alpha(t) = \alpha_{min.} + (\alpha_{max.} - \alpha_{min.}) \sin^v \left(\frac{2\pi t}{\tau_v} \right)$$

formunda zamana bağlı değişen dinamik bir bulaşma parametresi alınmıştır. Burada v pozitif çift tamsayı olup, ihlalin ölçeğini belirler. Yoğun ihlaller v nin büyümesi ile ifade edilir. τ_v ise döngü periyodunun zaman ölçeği olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla daha yoğun bir ihlal varken (v yüksek iken), vaka sayısının zirve durumu daha kısa sürede gerçekleşir. $v \rightarrow \infty$ ise ihlalin olmadığı, yani kapanma olmayan duruma karşılık gelir. Kapanmalardaki ihlallerin azalması içinde periyodik kapanma daha elverişlidir. Çünkü periyodik kapanma belirli bir kapanmadan sonra açılacağı bilindiğinden ihlal daha aza inecektir.

Uzun süreli kapanmalar, ekonomide büyük buhranlara sebebiyet verip beraberinde işsizlik, iflas ve yoksulluğu artıracığından uygulanmadan önce sonuçlarının göz önüne alınması gereken kapanmalardır. Bu sebeplerden dolayı uygulanacak kapanma modeli, salgını kontrol altında tutmayı hedeflerken ekonomiyi de göz ardı etmeyen bir model olmalıdır.

3.3. Karantina Ve Test Stratejileri

Karantinaya alınan ve tedavi gören kişiler sadece semptomatik bireylerdir. Ancak enfekte olduğu halde semptomları göstermeyen asemptomatik bireyler bilinmemektedir. Buda enfeksiyonun büyük bir kısmının karantinaya alınmayan asemptomatik bireyler tarafından yayılması anlamına gelir. O halde bu sorunu çözebilmek için asemptomatik bireyleri tespit edip karantinaya almak gerekir. Bu süreçte asemptomatik bireylerin, test yapma yoğunluğu artırılarak tespit edilmesi sağlanabilir. Bir başka yöntem ise bu bireylerin temaslı olup olmadıklarının tespit edilip, eğer temaslı iseler test sonucu veya test olmadan kendilerini karantinaya almalarıdır. Hem semptomatik bireylerin tedavisinde hemde asemptomatiklerin teşhis ve tedavisinde yapılan çalışma maddi olarak devletleri zorlayabilir. Hükümetin önceliği semptomatik bireyler için yeterli tıbbi

alt yapıyı sağlaması ve sonrasında asemptomatiklerin teşhis ve tedavisinde çalışma yapmalıdır. Bu strateji ne kadar erken uygulanırsa salgın okadar hızlı atlatılır.

3.4. Sosyalleşme Ve Hareketlilik

Sosyalleşme ve hareketlilik; enfeksiyonu zaman içerisinde farklı bölgelere yayması nedeniyle salgın hastalıkları etkileyen faktörler içerisinde bulunmaktadır. Örneğin Covid-19 gibi bulaşıcılığı yüksek bir hastalığın ilk olarak Çin'in Wuhan kentinde görülmesinin ardından insanların ülkeler arasındaki hareketliliği hastalığın neredeyse tüm dünyaya yayılmasına sebep olmuştur. Ancak çoğu matematiksel modelde hastalığın ortaya çıktığı topluluklar kapalı olarak kabul edildiğinden salgınların uluslararası düzeyde yayılımı, yapılan çalışmalarda genellikle göz ardı edilmiştir. Bununla birlikte toplumun kendi içerisinde hareketliliği modellerde daha fazla etkiye sahip olmaktadır. Dolayısıyla bahsedilen hareketlilik toplulukların sosyalleşmeleri ve kültürel yapılarıyla da doğrudan alakalıdır. Bu nedenle kullanılan matematiksel modellerde toplumda meydana gelen hareketlilik S (duyarlı birey), E (enfekte olmuş ama henüz bulaşıcı olmayan) ve I_{as} (asemptomatik) bölümlerdeki bireyleri etkilemiş olup diğer bölümlerde hasta ve tedavi gören bireylerin izole olduğu düşünülmüştür (Menon, 2020). Toplumda görülen bu mobilizasyon, modellerde yer alan ve hastalığın bulaşma oranı olarak adlandırılan α parametresi üzerinde doğrudan bir etkiye sahiptir. Örneğin salgının ilk zamanlarında vaka sayılarının arttığı bölgelerde yaşayan bireyler panik etkisiyle daha güvenli bölgelere seyahat ettiklerinde hastalığın yayılımını artırmaktadırlar. Seyahatlerde göç veren yerlerde zamanla daha az vaka görülmekle beraber göç alan yerlerde de vaka sayılarında artışlar olmaktadır. Daha sonra halkın bilinçlenip hastalığa karşı farkındalığın artması ve kısıtlamalarla(kapanma, yasaklar, vb...) seyahatlerde de azalmalar gözlemlenir.

3.5. Testlerin Güvenirliği

Covid-19 gibi hava yoluyla dahi bulaşılabilen bir virüsün doğru ve hızlı tespit edilmesi, enfeksiyonun yayılma hızını kontrol altına alma noktasında oldukça etkilidir. Matematiksel modellerde virüsün teşhisinde kullanılan testlerin güvenilir olduğu kabul edilir. Bazı modellerde karantinaya alınan ve tedavi görenler, sadece test sonuçları pozitif olan bireylerdir. Bu bireylere uygulanan testlerin yüzde yüz güvenilir olduğu varsayılmıştır. Ancak İngiltere Bristol Üniversitesi'ndeki araştırmacılar, yapılan testlerde yüzde 30'luk bir yanlışlık olduğunu iddia etmektedir. Sonuçlara göre negatif ancak gerçekte pozitif olan bireyler, karantinaya alınmadıkları için enfeksiyonu duyarlı bireylere bulaştırarak hastalığın yayılımını artırır.

3.6. Hastalığın Genetik Değişime Uğraması (Mutasyonlar)

Bulaşıcılığı yüksek olan hastalıklarda salgının seyri uzadıkça virüste mutasyonlar görülmektedir. Covid-19 da zamanla Alfa, Beta, Gamma, Delta ve Omicron varyantlarıyla devam etmiştir.

Varyantlarla beraber virüsün bulaşıcılığı artmakta, hastalık semptomları değişmekte, hastalığın etki ettiği yaş grubu genişlemekte, alınan tedbirlerin (Maske, mesafe, vb...) etkinliği azalmaktadır.

3.7. Aşı, Tedavi Yöntemleri Ve Toplumsal Bağışıklık

Bilmediğimiz hastalıklarda öncelik, hastalığın doğru tespit edilmesidir. Doğru tespit sonrasında etkili tedavi yöntemleri, daha sonrasında da uygun aşının bulunmasıyla topluma bağışıklık kazandırmak gelmektedir. Covid-19'da uygun tedavinin hemen bulunamaması, hızla artan vaka sayılarına karşı hastanelerin yeterli gelmemesi hastalığın yayılım hızını artmasına sebep olmuştur. Ülkelerde bu hastalığa karşı aşının bulunması da zaman almış, toplumun aşıyla bağışıklık kazanması uzun sürmüştür.

3.8. Temel Üreme Sayısı (R_0)

Bulaşıcı bir hastalıkta hasta olan bireyin mikrobu ikincil vakalara bulaştırdığı ortalama insan sayısına R_0 denir. R_0 'ın belirlenmesi için gereken şartlar arasında; toplumun tamamının duyarlı olması, toplumun bu hastalıkla ilk kez karşılaşması, toplumun bu hastalığa karşı aşılammış olması, daha önce kimsenin hastalığa yakalanmamış olması, hastalığın yayılmasının kontrol edilememesi yer almaktadır (Turan, 2020; Türkiye Bilimler Akademisi, 2020).

Temel üreme sayısını etkileyen faktörler enfeksiyon aralığı, bulaşıcı olunan dönem, bireylerin temas sıklığı, hastalığı yayılım şekli, toplumsal ve coğrafik etmenler biçiminde sıralanabilir. Hastalıkların bulaşıcılık dönemleri farklılık gösterir. Bulaşıcılık dönemi ne kadar uzarsa birey hastalığın daha fazla ikincil vakalara bulaşmasına sebep olacaktır. Bu durum R_0 değerini daha da yükseltecektir. Örneğin, 1918 yılında dünya genelinde etkili olan İspanyol gribi için R_0 değerinin minimum 1.4, maksimum 2.8 değerleri arasında olduğu tahmin edilmektedir (Türkiye Bilimler Akademisi, 2020). Yine aynı kaynakta 2009 yılında etkili olan H1N1 virüsü için ise R_0 değerinin 1.4 ile 1.6 arasında olduğu belirtilmiştir. Hasta birey, bulaş döneminde enfekte olmayan veya aşılammış ne kadar çok kişiyle temas ederse hastalık o kadar daha hızlı ilerler; ancak birey kendini bulaş döneminde karantinaya alır ya da daha az bireyle temas ederse R_0 değeri düşük olacaktır. R_0 değeri yüksek olan hastalıklar, temas yoluyla değil; havadan yayılan hastalıklardır. COVID-19, bu hastalıkların başında yer alırken HIV ve Ebola gibi hastalıklar sadece vücut sıvılarıyla bulaşabilen hastalık olduğu için bulaşma hızı daha düşüktür. Bunun yanı sıra toplumun demografik yapısı ve yaşadığı bölge de hastalığın yayılımında etmen olduğundan dolayı temel üreme sayısı üzerinde etkiye sahiptir.

Bulaşıcı hastalıklarda R_0 değerinin anlamı;

1. $R_0 < 1$ ise enfeksiyonlu birey mikrobu birden az kişiye bulaştırır ki bu da hastalığın azalıp biteceği anlamına gelir.

2. $R_0 = 1$ ise enfeksiyonlu birey mikrobu bir kişiye bulaştırır ki bu durum da hastalık stabil kalır ve herhangi bir salgına sebep olmaz.

3. $R_0 > 1$ ise enfeksiyonlu birey mikrobu birden fazla bireye bulaştırdığı için hastalığın hızla yayılıp salgına dönüşmesine sebep olur.

Temel üreme sayısı R_0 ın hesaplanmasında farklı yaklaşımlar kullanılabilir. Bu yaklaşımlardan bazılarını inceleyelim.

3.8.1. $R_0 = \exp(rT_c)$ formülüne göre R_0 hesaplama

Bu formül için kullanılan bazı kavramlar vardır. Bunlar:

R_0 (Temel Üreme Sayısı): Bulaşıcı bir hastalıkta hasta olan bireyin mikrobu ikincil vakalara bulaştırdığı ortalama insan sayısıdır.

Üreme Aralığı(T_c): Bireyin enfekte olduğu zaman ile bu bireyin enfekte ettiği ikincil vakanın enfekte olma zamanı arasındaki ortalama geçen süredir.

Büyüme Hızı(r): Birim zamanda, yeni vaka sayısındaki kişi başına değişimdir.

- T_c : Ortalama üreme aralığı (6 gün)
- r : Büyüme hızı (0.05)

$R_0 = \exp(rT_c)$ için $\exp(6 \times 0.05) = 1.35$ olur.

3.8.2. $R_0 = 1 + rT_c$ formülüne göre R_0 hesaplama

Yukarıda verdiğimiz $R_0 = \exp(rT_c)$ formülünde üstel fonksiyonun MacLaurin serisine açılıp ilk iki teriminin alınmasıyla hesaplanan yöntemdir.

- T_c : Ortalama üreme aralığı (6 gün)
- r : Büyüme hızı (0.05)

$R_0 = 1 + rT_c$ için $1 + 6 \times 0.05 = 1.30$ olarak hesaplanır.

3.8.3 Matris temelli yaklaşımlarla R_0 hesaplanması

Bu tip yaklaşımlar, hastalığı modelleyen diferansiyel denklem sistemlerinden elde edilen matrislerin özdeğerleri kullanılarak temel üreme sayısının elde edilmesi ilkesine dayanmaktadır. Burada hesaplamalar hastaliksız denge noktası (disease free equilibrium) adı verilen ve hastalığı içeren değişkenlerin sıfır olarak alındığı E_0 noktasında yapılır (Martcheva,2015). Şimdi bu

yaklaşımında kullanacağımız jakobiyen matris, denge noktası, spektral yarıçap ve bir matrisin izi kavramlarını tanımlayalım.

Tanım (Jakobiyen Matris)

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tanımlı ve herbir bileşeninin \mathbb{R}^n de birinci mertebeden kısmi türevleri var olan vektör değerli bi fonksiyon olsun. Yani;

$$\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

olmak üzere \vec{F} nin Jakobiyen matrisi, f_i fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini içeren $m \times n$ tipindeki

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matrisi olarak tanımlanır. Bizim bu bölümde kullanacağımız Jakobiyen matrisler kare matrisler olacaktır.

Tanım (Denge Noktası)

Birinci bölümde tanımladığımız (4) birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi için sağ taraftaki $\vec{F}(x, \vec{V})$ vektörünü sıfır yapan vektöre sistemin denge noktası adı verilir. Yani sistemin denge noktasını bulmak için $\vec{F}(x, \vec{V}) = \vec{0}$ denklem sistemi çözülür.

Tanım (Bir Matrisin Spektral Yarıçapı)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kare matrisinin spektral yarıçapı, o matrisin mutlak değerce en büyük özdeğeri olarak tanımlanır ve $\rho(\mathbf{A})$ ile gösterilir. Yani $\sigma(\mathbf{A})$, \mathbf{A} 'nın özdeğerlerinin oluşturduğu küme olmak üzere; spektral yarıçap;

$$\rho(\mathbf{A}) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$$

olacaktır.

Tanım (Bir Matrisin İzi)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ kare matrisinin izi $Tr(\mathbf{A})$ ile gösterilir ve $Tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ biçiminde tanımlanır.

3.8.3.1. Jakobyen Matris Yaklaşımı

Hastalığın modellenmesi sonucu elde edilen diferansiyel denklem sistemine ait Jakobyen matris hastalıksız denge noktasında hesaplanarak, bu matrisin bütün öz değerlerinin negatif reel kısmına sahip olması koşulu üzerine R_0 , temel üreme sayısı hakkında yorum yapma yaklaşımıdır (Martcheva, 2015). Bu yaklaşımın basit bir şekilde uygulanabilmesi için özdeğerlerin kolayca hesaplanabilmesi veya Jakobyen matris özdeğerlerinin negatif reel kısma sahip olabileceği koşullarının sağlatılarak $R_0 < 1$ şartı için (hastalığın kararlılığı) gerekli olan ifadeden R_0 hakkında yaklaşımın elde edilmesi gerekir. Eğer bir matris 2×2 boyutunda ise özdeğerlerinin negatif reel kısma sahip olması için determinantı pozitif ve izinin negatif olması yeterlidir. Dolayısıyla hastalıksız denge noktasında hesaplanan Jakobyen matrisinin özdeğerlerinin hesaplanmasında $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_4) = 0$ denklemi 2×2 boyutuna indirgenebildiğinde bu yaklaşım rahatlıkla kullanılabilir. Şimdi bir örnek üzerinde bu yaklaşımı inceleyelim.

Örnek:(Martcheva, 2015, s.120, problem 5.4) Karantina (Q) bölümünü içeren ve parametreleri

λ : Doğum veya göç oranı,

β : İyileşme oranı,

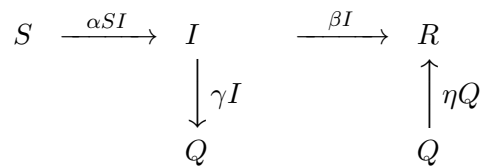
α : Bulaşma oranı,

γ : Hastalanan bireylerin karantinaya alınma oranı,

η : Karantinadaki hasta bireylerin iyileşme oranı,

μ : Doğal ölüm oranı

olarak tanımlanan ve



şeması yardımı ile

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \lambda - \alpha SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - (\beta + \gamma + \mu)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \gamma I - (\eta + \mu)Q \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I + \eta Q - \mu R \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sisteminden oluşan modelin R_0 değerini Jakobyen yaklaşımı yardımıyla inceleyelim. Bu tür modellemeler genellikle çocuk hastalıklarında kullanılır. Çünkü karantina hastalığın kontrol altına alınmasında aktif bir rol oynayacaktır ve çocuklarda karantina süreci birçok faktörü etkilemeyecektir.

Öncelikle sistemin hastaliksız denge noktasını hesaplamak için; $I = Q = R = 0$ alırsak $S^* = \frac{\lambda}{\mu}$ elde edilir. Dolayısıyla sistemin hastaliksız denge noktası $\vec{E}_0 = (S^*, 0, 0, 0)^T$ vektörü olacaktır. Sistemin Jakobiyen matrisi ise;

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\alpha I - \mu & -\alpha S & 0 & 0 \\ \alpha I & \alpha S - (\beta + \gamma + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\eta + \mu) & 0 \\ 0 & \beta & \eta & -\mu \end{bmatrix}$$

formunda olur. Burada $S = S^*$, $I = Q = R = 0$ alınıp $\mathbf{J}(\vec{E}_0)$ hesaplanır ve $\det(\mathbf{J}(\vec{E}_0) - \lambda \mathbf{I}_4)$ karakteristik denklemi yazılırsa;

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}(\vec{E}_0) - \lambda \mathbf{I}_4) &= \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\alpha S^* & 0 & 0 \\ 0 & \alpha S^* - (\beta + \gamma + \mu + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\eta + \mu + \lambda) & 0 \\ 0 & \beta & \eta & -\mu - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\mu - \lambda)(-\mu - \lambda) = \begin{vmatrix} \alpha S^* - (\beta + \gamma + \mu + \lambda) & 0 \\ \gamma & -(\eta + \mu + \lambda) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda_{1,2} = -\mu$ olup diğer değerler için

$$\mathbf{J}_1(\vec{E}_0) = \begin{bmatrix} \alpha S^* - (\beta + \gamma + \mu) & 0 \\ \gamma & -(\eta + \mu) \end{bmatrix}$$

matrisini incelemek veya diğer özdeğerleri hesaplayıp reel kısımlarını yorumlamak gereklidir. Diğer özdeğerler hesaplanırsa $\lambda_3 = -(\eta + \mu)$ ve $\lambda_4 = \alpha S^* - (\beta + \gamma + \mu)$ olacağından $\lambda_3 < 0$ dır. $\lambda_4 < 0$ şartı için;

$$\alpha S^* < \beta + \gamma + \mu \Rightarrow \frac{\alpha S^*}{\beta + \gamma + \mu} < 1$$

olacağından hastalığın stabilitesi $R_0 = \frac{\alpha S^*}{\beta + \gamma + \mu}$ olması durumunda sağlanır. Aynı koşul

$\mathbf{J}_1(\vec{E}_0)$ matrisi için $\det(\mathbf{J}_1(\vec{E}_0)) > 0$ eşitsizliği yardımı ile de bulunur.

3.8.3.2. Next Generation Matris Yaklaşımı

Hastalığı modelleyen diferansiyel denklemlerde hastalığı içeren değişkenlerin ayrı olarak düşünülüp, kendi içerisinde gruplanması (doğrusal-doğrusal olmayan, kadın-erkek bireyler vb...) sonucunda oluşturulan ve Next Generation matrisi adı verilen matrisin hastaliksız denge noktasında hesaplanıp özdeğerleri yardımıyla temel üreme sayısı R_0 hakkında bilgi edinilmesi yaklaşımıdır. Şimdi bu yaklaşımı denklemleri doğrusal olmayan-doğrusal ayrışımı ile gruplandırarak

bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek:(Alzahrani, 2020) Bir toplumda sigara içme alışkanlığının aşağıda verilen gruplar ve tanımlanan parametreler yardımıyla modellendiği diferansiyel denklem sistemini göz önüne alıp, bu sigara içme hastalığının temel üreme sayısını bu denklem sistemine ait Next Generation yaklaşımı yardımıyla inceleyelim. Buna göre;

X : Sigara içmeye duyarlı (meyilli) bireyler (susceptible smokers)

H_1 : Sigarayı burundan çekme yoluyla içenler (snuffing class)

H_2 : Düzensiz içiciler (irregular smokers)

Y : Düzenli içiciler (regular smokers)

Z : Bırakanlar

λ : Doğum veya göç oranı

β_1 : X ten H_1 e geçiş oranı

β_2 : H_1 den H_2 ye geçiş oranı

ω : Düzensiz içicilikten düzenli içiciliğe geçiş oranı

γ : Bırakma oranı

μ : Doğal ölüm oranı

α : Bırakıp tekrar başlama yatkınlık oranı

ψ : H_1 deki nüfusun sigaradan ölüm oranı

ϱ : Sigara kaynaklı hastalıklardan ölüm oranı

tanımlamaları yardımıyla hastalığı modelleyen diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \lambda - \beta_1 X H_1 - \mu X + \alpha Y \\ \frac{dH_1}{dt} &= \beta_1 X H_1 - \beta_2 H_1 H_2 - (\psi + \mu) H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= \beta_2 H_1 H_2 - (\varrho + \omega + \mu) H_2 \\ \frac{dY}{dt} &= \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu) Y \\ \frac{dZ}{dt} &= \gamma Y - \mu Z\end{aligned}$$

formunda olacaktır. İlk dört denklem Z değişkeninden bağımsız olduğundan dolayı sonuncu denklem ihmal edilirse, ilk dört denklem için sigara içilmesinden bağımsız denge noktası \vec{E}_0 ; $H_1 = H_2 = Y = 0$ alınıp ilk dört denklemin 0 a eşitlenerek çözülmesiyle; $X = \frac{\lambda}{\mu}$, $H_1 = H_2 = Y = 0$ elde edilerek $\vec{E}_0 = (\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0)^T$ bulunur.

Next generation matris yaklaşımı ile bu modelin temel üreme katsayısı R_0 ı hesaplamak için sigara kullanan H_1 , H_2 ve Y değişkenlerini içeren denklemlerin sağ tarafları doğrusal olmayan ve

doğrusal terimler gruplanarak;

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 X H_1 - \beta_2 H_1 H_2 \\ \beta_2 H_1 H_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{V} = \begin{bmatrix} (\psi + \mu) H_1 \\ (\varrho + \omega + \mu) H_2 \\ -\omega H_2 + (\alpha + \gamma + \mu) Y \end{bmatrix}$$

vektörleri yardımıyla

$$\vec{F} - \vec{V} = \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ Y' \end{bmatrix}$$

formunda yazılır. \mathbf{F} ve \mathbf{V} matrisleri ise sırasıyla \vec{F} ve \vec{V} vektörleri için H_1, H_2 ve Y değişkenlerine göre elde edilecek Jakobiyen matrislerinin \vec{E}_0 hastalısız denge noktasındaki değerlerinden oluşan 3x3 tipindeki matrislerdir. Yani;

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \psi + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \varrho + \omega + \mu & 0 \\ 0 & -\omega & \alpha + \gamma + \mu \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bu matrisler yardımıyla \mathbf{K} ile gösterilen Next generetation matrisi ise;

$$\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\psi + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho + \omega + \mu} & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{(\alpha + \gamma + \mu)(\varrho + \omega + \mu)} & \frac{1}{\alpha + \gamma + \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 \lambda}{\mu(\psi + \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup; bu matrisin baskın özdeğeri $\frac{\beta_1 \lambda}{\mu(\psi + \mu)}$ olacaktır. Dolayısıyla model için temel üreme sayısı

$R_0 = \frac{\beta_1 \lambda}{\mu(\psi + \mu)}$ olarak bulunur.

4. BÖLÜM

COVID-19 HASTALIĞI İÇİN AŞI İÇEREN SVIR MODELİ VE SAYISAL SONUÇLAR

4.1. SVIR Modeli

Covid-19 mikrobunun oluşturduğu koranavirüs hastalığı şiddetli ağrılar, solunum güçlüğü, koku ve tat kaybı gibi ciddi belirtiler eşliğinde ölümlere sebep olup dünyada pandemiye neden olarak insanların yaşam biçimini olumsuz etkilemiştir. Hastalığın kontrol altına alınabilmesi için kullanılan yöntemlerden biri olan aşı önemli etkiye sahiptir. O halde aşılama bir salgın veya pandeminin seyrini büyük ölçüde etkilemektedir. Aşılama, popülasyonun bağışıklık seviyesini iyileştirmek suretiyle, hastalığın yayılmasının kontrol altına alınmasında etkin bir rol oynar. Dolayısıyla aşılama duyarlı birey sayısı arttıkça hastalığın yayılması azalacaktır. Aşının hastalıkların seyrine etkisinin incelendiği çalışmalar literatürde bulunmaktadır (Bai, 2022; Scherer, 2002; Wyss, 2023). Klasik SIR modeline aşılama bireylerin dahil edilmesiyle oluşan modelde S (duyarlı), V (aşılama), I (hastalıklı), R (iyileşen) olup dört bölümlü $SVIR$ modeli oluşur. Bu modelde her bir bölüm için veri ve parametrelerin başlangıç değerleri belirlenip ikinci mertebeden Runge-Kutta metodu yardımıyla sayısal çözümlerin elde edilmesi planlanmıştır. Elde edilen bu sayısal veriler gerçek değerlerle kıyaslanarak grafikler yardımıyla yorumlanacaktır.

Toplumun dört bölüme ayrıldığı bu modelde hastalığın ilerleyici doğası nedeniyle t bağımsız değişken olup bağımlı değişkenleri S, V, I, R ve sistemin içerdiği parametreler aşağıdaki gibi tanımlanır;

S (Susceptible): Hastalığı kapmaya duyarlı olan kişi sayısı

V (Vaccinated): Aşılama birey sayısı

I (Infected): Enfekte olmuş ve hastalığı duyarlı bireylere bulaştırabilecek kişi sayısı

R (Recovered): Hastalığı başkalarına bulaştıramayanlar, iyileşenler veya vefat eden kişi sayısı

α : Hastalığın bulaşma oranı, $\alpha > 0$

β : Hastalığın iyileşme oranı, $\beta > 0$

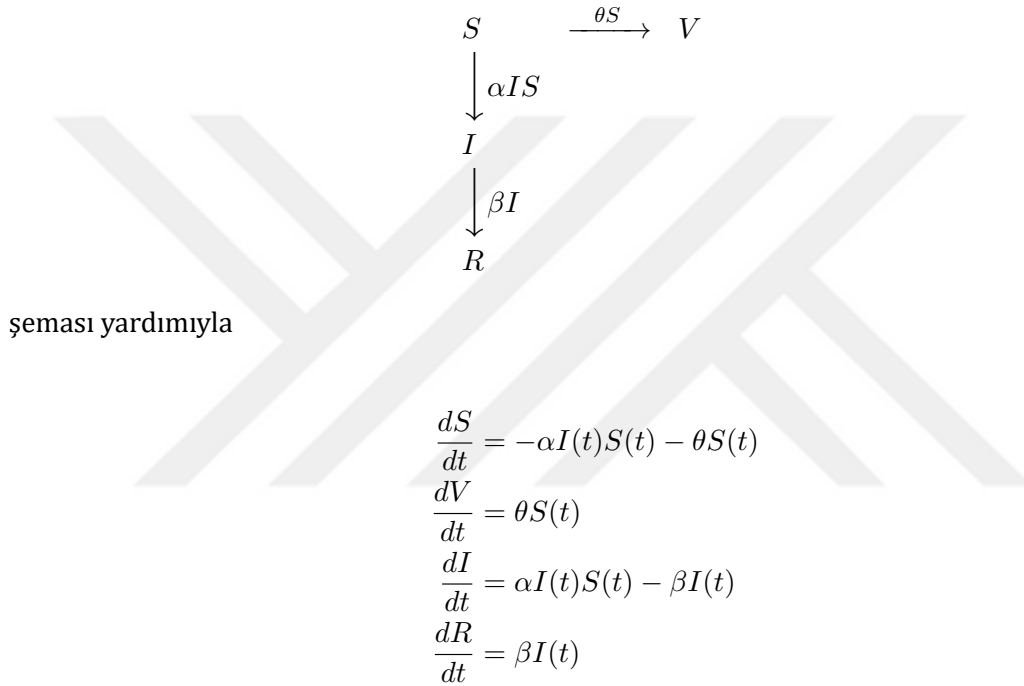
θ : Aşılama oranı, $\theta > 0$

Modelin kurulmasında;

- α, β ve θ parametrelerinin hastalık boyunca sabit alındığı ve her toplumun yapısına göre farklılık gösterebileceği,
- İçer ve dışa göçlerin olmadığı, hastalık dışı doğum ve ölümlerin sayılmadığı, değişmeyen bir nüfusun olduğu,

- İyi karışmış, homojen bir toplum yani toplumdaki bireylerin birbirleriyle eşit oranda kontak halinde olduğu,
- Tam bağışıklık (kalıcı bağışıklığın) kazanıldığı, hastalığa yakalanan bireyin iyileştikten sonra bir daha aynı hastalığa yakalanmayacağı ,
- Enfekte bireyin hastalığı hemen bulaştırdığı, kuluçka döneminin olmadığı,
- Aşı olan bireyin hastalığa yakalanmayacağı

varsayımları kabul edilmiştir. SVIR modelinde herbir bağımlı değişkeninin değişim oranlarını,

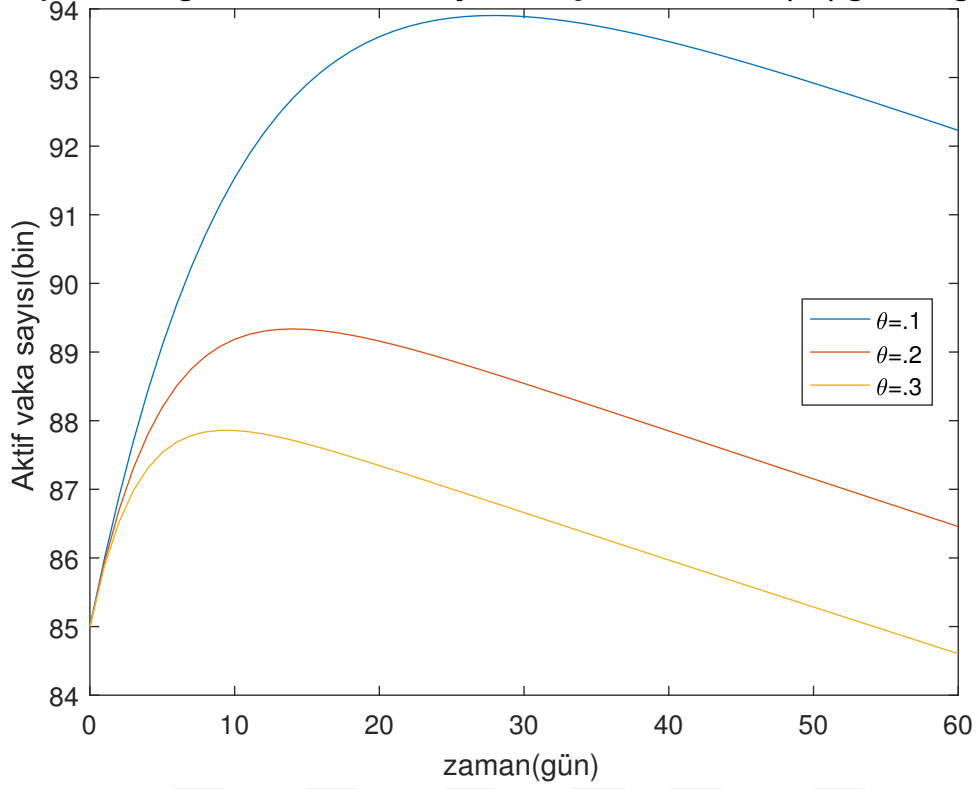


diferansiyel denklem sistemiyle tanımlayabiliriz.

4.2. Sayısal Sonuçlar

Tanımlanan bu diferansiyel denklem sistemini Covid-19 hastalığına, Türkiye’de aşının başladığı dönemi içeren ve 01.01.2021 tarihinden itibaren 60 günlük periyodu içine alan bir zaman aralığında uygulayacağız. Bunun için bulaşma ve iyileşme parametlerini sırasıyla $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$ (Güzey,2021; Köker,2021), başlangıç değerlerini ise duyarlı bireyler, aşılananlar, aktif vakalar(hasta) ve kurtulanlar için sırasıyla $S_0 = 26000000$, $V_0 = 1$, $I_0 = 85000$ ve $R_0 = 2115000$ alıp, sistemi farklı aşılama oranları kullanarak daha önce tanımladığımız RK2 metodu kullanarak sayısal olarak çözeceğiz. Burada adım aralığını 1 gün olarak alıp tüm değişkenler için günlük bazda değişimleri inceleyeceğiz. İlk olarak aşılama oranlarındaki değişimin aktif vaka sayısı üzerindeki etkisini inceleyelim. Bunun için üç farklı aşılama sabiti $\theta = 0.1$, $\theta = 0.2$, $\theta = 0.3$ için yukarıda belirlediğimiz parametreleri ve başlangıç değerlerini kullanarak sistemi I değişkeni için çözdüğümüzde Şekil 4.1 deki grafikleri elde ederiz. Her üç grafikten de açıkça görüleceği

Toplumdaki günlük aktif vaka sayısının aşılama sabitine(θ) göre değişimi

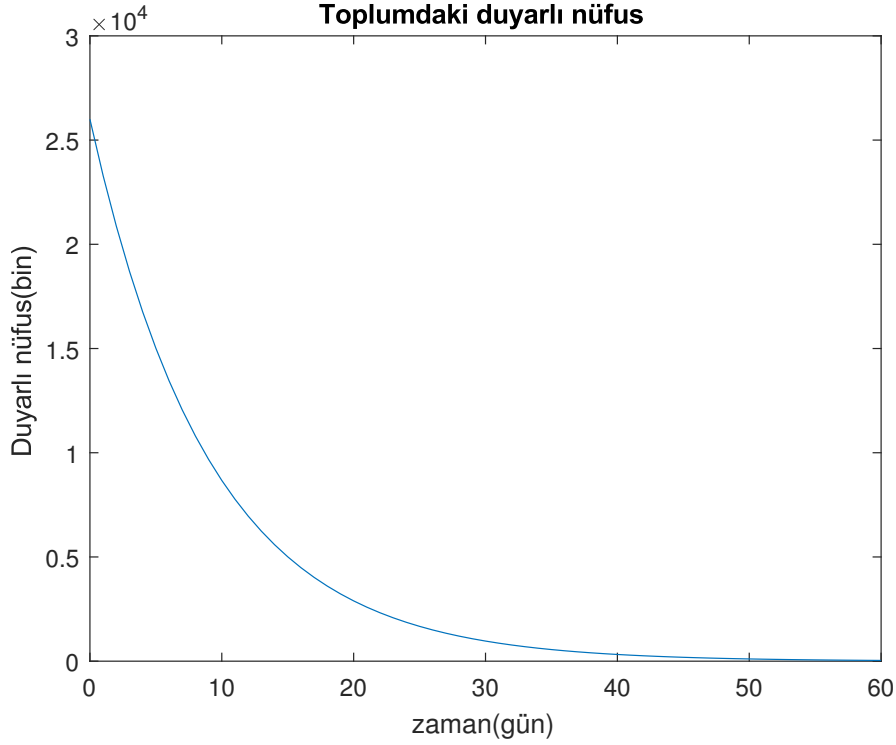


Şekil 4.1. Farklı aşılama sabitleri için I (aktif vaka sayısı) değişkeninin çözümleri

üzere başlangıçta aşılama hızının yeterli olmaması nedeniyle aktif vaka sayısında belirli bir süre artış gözlemlenmiş, ancak sonrasında aşılama hızındaki artışla aktif vaka sayısı düşüşe geçmeye başlamıştır. Burada dikkat çeken nokta ise yüksek aşılama sabitinde artış periyodu hem kısa sürmekte, hem de aktif vaka sayısı daha düşük değerlere ulaştıktan sonra düşüşe geçmektedir. Bu ise modelin varsayımı olan kapalı popülasyonlarda aşılama hızının aktif vaka sayısının azaltılmasında önemli bir role sahip olduğunu göstermektedir. Bunun yanında modelde bulaşma hızının sabit kabul edilmesi zaman ilerledikçe vaka sayısının düşüşe devam etme eğiliminde olmasına neden olmaktadır. Ancak incelediğimiz 60 günlük periyodun sonlarında ve bu periyot sonrasında Türkiye’de vaka sayısında tekrar bir yükseliş gözlemlendiğinden, modelin daha gerçekçi olması için bulaşma parametresinin sabit alınmaması gerektiği sonucuna varılabilir. Aynı şekilde iyileşme parametresi de belirli dönemlerde değişken bir yapıya sahip olarak tanımlanmalıdır.

Belirtilen periyotta Türkiye’de vaka artışlarındaki değişim düşük aşılama sabiti ile örtüşmektedir. Bu nedenle sistemin belirtilen periyotta tüm değişkenlerinin çözümleri $\theta = 0.11$ alınarak Şekil 4.2, Şekil 4.3, Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 te sergilenmiştir.

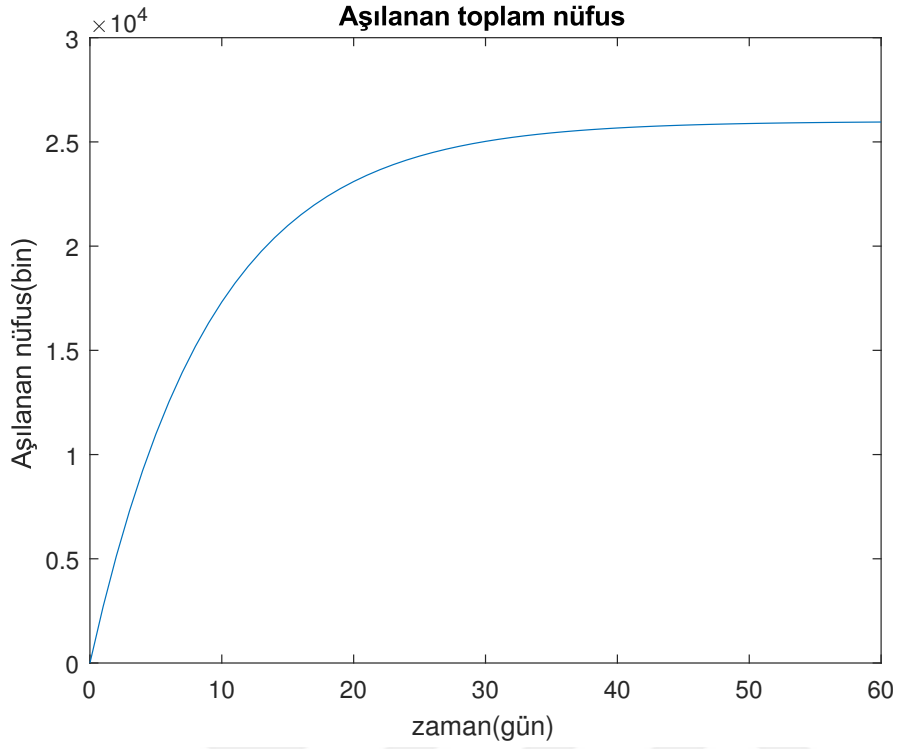
Model kapalı toplum üzerinde uygulandığından belirtilen periyot sonunda duyarlı nüfus sa-



Şekil 4.2. Duyarlı nüfus değişkeni S nin zamana göre değişim grafiği

yısındaki düşüş, buradaki populasyonun büyük bölümünün aşılınmış nüfusa, geri kalanın ise hastalanan ve iyileşen gruba geçmesi olarak yorumlanabilir. Şekil 4.2 deki grafikte toplam duyarlı nüfus, Şekil 4.3 te toplam aşılınan nüfus, Şekil 4.4 te ise günlük aktif vaka sayısı ve Şekil 4.5 te ise toplam iyileşen nüfus dikkate alınmıştır. I değişkeni için günlük alınmasındaki neden, duyarlı nüfusa hastalığı bulaştıracak olan bireyler anlık aktif vakalar olmasından dolayıdır. Yani duyarlı nüfustaki anlık değişime, hastalandıktan sonra iyileşen nüfusun etkisi olmamaktadır.

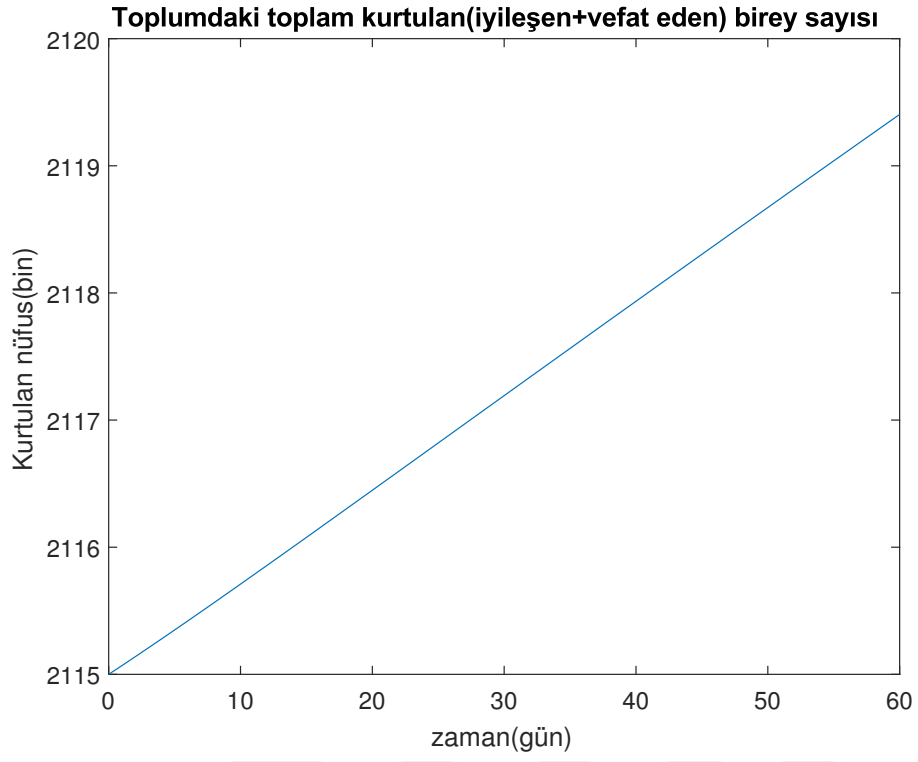
Bununla birlikte grafiklerde değerler gerçek değerlerden üç sıfır atılarak sergilenmiş ve programlamada parametreler buna göre ölçeklendirilmiştir. Sayısal çözümler Matlab programı kullanılarak elde edilmiştir.



Şekil 4.3. Aşılana nüfus değışkeni V nin zamana göre değışim grafiği



Şekil 4.4. Enfekte nüfus(aktif vaka sayısı) değışkeni I nin zamana göre değışim grafiği



Şekil 4.5. Kurtulan(iyileşen+vefat eden) nüfus değişkeni R nin zamana göre değişim grafiği

SONUÇ VE ÖNERİLER

Salgın hastalıklar tarih boyunca insanların yaşadığı en önemli sıkıntıların başında yer almaktadır. Bu hastalıkların bazıları ise ortaya çıktığı coğrafyayı da aşarak tüm dünyayı etkisi altına alan bir yapıya bürünmüştür. Bu hastalıkların ilerlemesinin tahmin edilmesi, bu ilerlemede etken olan parametrelerin belirlenerek önlemler vasıtasıyla hastalığın kontrol altına alınması ve bu sürecin izlenebilir olması açısından matematiksel modeller önemli bir role sahiptir. Bu modeller; salgın hastalıkları sayısal verilerle daha derinlemesine analiz ederek gelecekte bu tip hastalıklarla karşılaşılması durumunda alınacak önlemler için rehber olma görevini üstlenmektedir. Ayrıca matematiksel modeller, bulaşıcı hastalıklarda alınan tedbir ve tedavilerin uzun vadede nasıl bir seyir izlediğinin görsellerle incelenmesine de olanak tanımaktadır. Bu tezde tarihsel süreçte karşılaşılan salgın hastalıklar için oluşturulan matematiksel modeller analiz edilmiştir. Bu bağlamda hastalığın yayılımını etkileyen en büyük etmenlerden birisi olan temel üreme katsayısının elde edilmesi için matematiksel yöntemler araştırılmıştır. Aşının etkinliğinin incelendiği matematiksel modelin çözümleri, Türkiye'deki verilerden elde edilen parametreler kullanılarak oluşturulmuştur. Diferansiyel denklem sistemi olarak bilinen bu modellerin sayısal çözümünde kullanılacak sayısal metotlar analiz edilerek bu sayısal metotlardan, ikinci mertebeden Runge-Kutta Metodu oluşturulan bu denklem sisteminin sayısal çözümü için kullanılmıştır. Sayısal çözümler Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve bu çözümler grafikler vasıtasıyla görselleştirilmiştir. Uygun ve etkili aşının modele dahil edilmesiyle oluşan SVIR modelinde, aşıyla birlikte bulaşıcılığı azalan hastalığın yayılım hızının da azaldığı görülmüştür. Burada bulaşıcılığı yüksek ve sonuçlarında kayıpları fazla olan hastalıklarda etkili aşının bulunmasında geçen zamanın hastalığın yayılmasını olumsuz etkilediğini belirtmek gerekir. Belirli zaman aralıklarında gerçek veriler ile elde edilen sayısal çözümler karşılaştırılarak arada oluşan farkın nedenleri yorumlanmıştır. Buna göre modelde verilen parametrelerin gerçek verilerle tam olarak örtüşmemesi, hastalığın yayılımının, durağanlaşmasının veya sönümlenmesinin tamamıyla insanların davranışlarıyla ilgili olması ve bu davranışların net bir şekilde tahmin edilememesi, hastalığı etkileyen ve modele dahil edilemeyen birçok çevresel, kültürel, ekonomik ve coğrafi etmenin bulunması oluşan bu farkların açıklanmasında birer etmen olarak düşünülmüştür. Bununla birlikte modelde kullanılan bulaşma, iyileşme, aşılama vb... parametrelerin sabit değil, zamana göre değişen bir yapıda tanımlanması modellerin daha gerçekçi olmasına olanak tanır. Sonuç olarak matematiksel modellerin salgın hastalıkların seyri açısından ne denli önemli olduğu tezde elde edilen veriler ışığında gözlemlenmiştir. Bununla birlikte incelenen ve sunulan modele daha fazla değişkenin eklenmesi durumunda daha etkin modellerin elde edilebileceği, ancak bu durumun kontrol edilen parametre sayısını artırması nedeniyle daha karmaşık bir yapıya yol açabileceği, bununla birlikte bu iki durum arasında bir optimizasyon sağlanmasının ileriki çalışmalarda araştırma konusu olabileceği ifade edilebilir.

KAYNAKLAR

- Ahmad, M, J. (2021). Bazı Matematiksel Epidemiyoloji Modellerin Yapay Sinir Ağı Çözümleri Üzerine. (Yüksek Lisans Tezi), Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Akpınar, H. (2012). Bulaşıcı Hastalıkların Yayılımının Tahmininde Deterministik Modellerin Kullanılması. *Öneri*, 10(38), 97-103.
- Ala'raj, M., Majdalawieh, M., Nizamuddin, N. (2021). Modeling and forecasting of COVID-19 using a hybrid dynamic model based on SEIRD with ARIMA corrections. *Infectious Disease Modelling*, 6, 98-111.
- Alzahrani, E. and Zeb A. (2020). Stability analysis and prevention strategies of tobacco smoking model. *Boundary Value Problems*, 2020:3.
- Bai, X. and Ma, S. (2022). Stochastic dynamical behavior of COVID-19 model based on secondary vaccination. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 20(2): 2980-2997.
- Bernoulli, D. (1766). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole. *Mem. Math. Phys. Acad. Roy. Sci.*
- Bernoulli, D. and Blower S. (2004). An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it. *Reviews in Medical Virology*, 14, 275-288.
- Chatterjee, S., Sarkar, A., Karmakar, M., Paul, R. (2020). Studying the progress of COVID-19 outbreak in India using SIRD model. *Indian J Phys* 95(9), 1941-1957.
- Çakan, S. (2021). Dağılımlı Zaman Gecikmeli Bir SIS Modelinin Kararlılığına İlişkin Bazı Sonuçlar. *Türk Doğa ve Fen Dergisi*, 2(10), 18-28.
- Güzey, N. (2021). Türkiye'deki COVID-19 yayılımının SIR temelli modellenmesinde RSS yöntemi ile parametre kestirimi. *GÜFBED*, 11(3), 956-963.
- Hamer, W. H. (1906). The Milroy Lectures on Epidemic Disease in England—The Evidence of Variability and Persistence of Type. *The Lancet*, 1, 733-739
- Harko, T., Lobo, F. S. N., Mak, M. K. (2014). Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation*, 236, 184-194.
- Hethcote, H, W. (2000). The Mathematics of Infectious Diseases. *SIAM Review* 4(42) 599-653.
- Işık N., Kaya, A. (2020). İnfeksiyöz Hastalıkların Yayılması ve Kontrolünde Matematiksel Modeller ve Sürü Bağışıklama. *Atatürk Üniversitesi Vet. Bil. Derg.*, 15(3), 301-307.
- Kermack, W., McKendrick, A. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of Royal Society of London. Series A*, 115, 700-721.
- Köker, N. (2021). Kararlılık Analizi ve Bir Uygulaması. (Yüksek Lisans Tezi), Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. New York, Springer.

Menon, A., Rajendran, N. K., Chandrachud, A., Setlur, G. (2020). Modelling and simulation of COVID-19 propagation in a large population with specific reference to India (preprint). *Medrxiv*

Parıldar, H. (2020). Tarihte Bulaşıcı Hastalık Salgınları. *Tepecik Eđit. ve Arařt. Hast. Dergisi*, 30, 19-26.

Pesen, B., Konak Özçelik, M. (2021). Geçmişten Günümüze Bazı Salgın Hastalıkların Toplum Üzerine Etkisi. *ZfWT*, 1(13), 227-248.

Ross, R. (1911). The prevention of malaria. John Murray.

Sahinbas, K., Catak, F. O. (2022). SEIR Based Epidemic Modeling of COVID-19 in Turkey. *European Journal of Science and Technology* 33, 306-310.

Scherer, A. and McLean, A. (2002). Mathematical models of vaccination. *British Medical Bulletin*, 62, 187-199.

Tekin, A.(2021). Tarihten günümüze Epidemiler, Pandemiler ve Ekonomik Sonuçları. *Süleyman Demirel Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 40, 330-355.

Turan, C. ve Hacımustafaoğlu, M.(2020). Enfeksiyon Hastalıklarında R_0 Oranı ve Klinik Anlamı Nedir?. *J. Pediatr. Inf.*, 14(1), 55-56.

Türkiye Bilimler Akademisi(2020). Covid-19 Küresel Salgın Deđerlendirme Raporu. Ankara.

Wyss A. and Hidalgo A. (2023). Modeling COVID-19 Using a Modified SVIR Compartmental Model and LSTM-Estimated Parameters. *Mathematics*, 11, 1436.

