



**T.C.**

**HİTİT ÜNİVERSİTESİ**

**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**ZAMANA BAĞLI KLASİK VE KUANTUM OSİLATÖRLER  
VE MATEMATİKSEL FİZİKTE UYGULAMALARI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Gamze YAPAR**

**Çorum - 2022**



**ZAMANA BAĞLI KLASİK VE KUANTUM OSİLATÖRLER  
VE MATEMATİKSEL FİZİKTE UYGULAMALARI**

**Gamze YAPAR**

**Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

**Fizik Ana Bilim Dalı**

**Yüksek Lisans Tezi**

**TEZ DANIŞMANI**

**Doç. Dr. Serhat Fevzi ÖZEREN**

**Çorum 2022**

**Bu çalışma Hitit Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından FEF19004.20.003 no'lu lisansüstü tez projesi kapsamında desteklenmiştir.**

Gamze Yapar tarafından hazırlanan “Zamana Bağlı Klasik ve Kuantum Osilatörler ve Matematiksel Fizikte Uygulamaları” adlı bu çalışma 30/09/2022 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği ile Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Fizik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat GEREKLİOęLU

Prof. Dr. Dilber Esra YILDIZ

Doç. Dr. Serhat Fevzi ÖZEREN

Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun kararı ile Gamze YAPAR'ın Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Prof. Dr. Muhammed Asif YOLDAř

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Gamze YAPAR



# ZAMANA BAĞLI KLASİK VE KUANTUM OSİLATÖRLER VE MATEMATİKSEL FİZİKTE UYGULAMALARI

Gamze YAPAR

ORCID: 0000-0002-2829-5811

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2022

## ÖZET

Bu çalışmada, doğadaki titreşim hareketini incelemek için fizikte ve uygulamalı bilimlerde önemli bir model olan klasik ve kuantum osilatörler üzerine araştırma yapıldı. Klasik osilatörleri daha detaylı ele almak için sönümlü harmonik osilatör, zorlanmış harmonik osilatör, zorlanmış sönümlü harmonik osilatör, rastgele frekanslı osilatör ve rastgele sönümlenmeli harmonik osilatör tek tek incelendi. Daha sonra, son yıllarda tekrar önem kazanan Brown hareketleri konusu ele alındı. Önce, Brown hareketleri konusunda son 20 yılda yapılan çalışmalar Web of Science veri tabanı kullanılarak bibliyografik olarak incelendi. Brown Hareketleri hakkında yapılan çalışmaların yıllara göre dağılımı, çalışmaların yapıldığı ülkelerin sıralaması, hangi alanlarda daha çok çalışma yapıldığı, çalışmaların hangi dergilerde yayınlandığı, konu hakkında yayınlanan yayınların Web of Science indeksi içinde hangi indeksler tarafından tarandığı ve atıf sayıları bakımından ayrıntılı olarak tablolar halinde incelendi. Bu taramalar sonucunda konunun yıl geçtikçe daha önem kazandığı farkedildi. Daha sonra, Brown hareketinde Langevin denklemi ile Brown parçacıklarının ortalamadan sapma miktarı, hareketteki parçacık sayısının çok olması sebebi ile istatistiksel olarak hesaplandı. Sonraki aşamada ise harmonik osilatör modeli ile sapma miktarı hesaplandı ve daha önce bulunan sonuçla karşılaştırıldı. Bulunan sonuç grafik olarak da incelendi. İnceleme sonucunda ortalamadan sapma miktarının sabit bir değere yaklaştığı görüldü. Dalgalanma Sönümlenme eşitliği ile konu ele alındı. Dalgalanmaya sebep olan kuvvet ile sönümlenmeye sebep olan etken arasındaki ilişki incelendi. Dalgalanma ve sönümleme arasındaki denge ilişkisi üzerinde duruldu. En son olarak kütleli zamanla değişen osilatör modeli Brown

hareketlerine uygulandı. Zamanla üstel olarak artan ve en fazla kütle değerinin iki katına kadar sınırlı bir kütle osilatör modeli yardımı ile incelenerek kare hız ortalamasının zamanla nasıl değiştiği incelendi ve sonuçlar grafik olarak ifade edildi. Zamanla kare hız ortalamasının artarak sabit bir değere yaklaştığı görüldü. Elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırıldı.

**Anahtar Kavramlar:** Osilatörler, Brown hareketi, Langevin denklemi

**Bilim Kodu:** 20206



# **TIME DEPENDENT CLASSICAL AND QUANTUM OSCILLATORS AND ITS APPLICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS**

Gamze YAPAR

ORCID: 0000-0002-2829-5811

HITIT UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL

Master of Science Thesis

September 2022

## **ABSTRACT**

In this study, research was conducted on classical and quantum oscillators, which are an important model in physics and applied sciences to study vibrational motion in nature. In order to consider classical oscillators in more detail, damped harmonic oscillator, forced harmonic oscillator, forced damped harmonic oscillator, random frequency oscillator and random damped harmonic oscillator are examined one by one. Then, Brownian motions, which has gained importance again in recent years, are discussed. First, studies on Brownian motions in the last 20 years were bibliographically reviewed using the Web of Science database. The distribution of studies on Brownian Motions by years, the ranking of the countries in which the studies were conducted, the fields in which more studies were conducted, the journals in which the studies were published, the indexes of the publications published on the subject in the Web of Science index and the number of citations were examined in detail in tables. As a result of these scans, it was realized that the subject became more important as the year passed. Then, the Langevin equation in Brownian motion and the deviation of the Brownian particles from the mean were calculated statistically due to the large number of particles in the motion. In the next step, the deviation amount was calculated with the harmonic oscillator model and compared with the previous result. The result was also analyzed graphically. As a result of the examination, it was seen that the amount of deviation from the mean approached a fixed value. The subject was handled with the Surge Damping equation. The relationship between the force causing the fluctuation and the factor causing the damping was examined. The balance relationship between ripple and damping was emphasized. Finally, the time-varying oscillator model was applied to Brownian motions.

It was examined with the help of a mass oscillator model, which increases exponentially over time and is limited to twice the maximum mass value, and how the mean square rate changes over time, and the results are expressed graphically. It was observed that the average frame rate increased over time and approached a constant value. The results obtained were compared with the results in the literature.

**Key Terms:** Oscillators, Brownian motion, Langevin equation

**Science Code:** 20206



## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince bana sürekli destek olan Hitit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü öğretim üyesi, danışmanım Doç. Dr. Serhat Fevzi ÖZEREN'e, bana her zaman desteğini hissettiren eşim Ömer YAPAR ve annem Mesude AYERDEN'e, varlıkları ile bana güç veren çocuklarım Elif Duru YAPAR ve Yusuf Kaan YAPAR'a, bana her zaman destek olan arkadaşım Başak KIRIŐ, çocukları Mehmet Noyan KIRIŐ ve Emir KIRIŐ'a çok teşekkür ederim.

Gamze YAPAR



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
TABLolar DİZİNİ.....	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
GİRİŞ.....	1

### 1.BÖLÜM

#### KLASİK VE KUANTUM OSİLATÖRLER

1.1.Harmonik Osilatör.....	3
1.2.Sönümlü Harmonik Osilatör.....	6
1.3.Zorlanmış Harmonik Osilatör.....	7
1.4.Zorlanmış, Sönümlü Harmonik Osilatör.....	8
1.5.Çift Kuyulu Potansiyeldeki Doğrusal Olmayan Osilatör.....	8
1.6.Tek Kuyulu Potansiyeldeki Doğrusal Olmayan Osilatör.....	8
1.7.Harici Gürültülü Harmonik Osilatör.....	9
1.8.Rastgele Frekanslı Harmonik Osilatör.....	9
1.9.Rastgele Sönümlemeli Harmonik Osilatör.....	9

### 2.BÖLÜM

#### BROWN HAREKETLERİ

2.1.Brown Hareketleri Konusunda Yapılan Çalışmaların Analizi.....	11
---	----

### 3.BÖLÜM

#### OSİLATÖR MODELLERİYLE BROWN HAREKETİNİN İNCELENMESİ

3.1. Langevin Denklemleri.....	17
--------------------------------	----

	<b>Sayfa</b>
3.2 Brown Hareketinde Harmonik Osilatör Yaklaşımı.....	19
3.3. Dalgalanma - Sönümlenme Eşitliği .....	22
3.4. Kütlesi Zamana Bağlı Osilatörler.....	23
<b>SONUÇ VE TARTIŞMA .....</b>	<b>27</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>29</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>29</b>
<b>EK 1. Zorlamalı Sönümlü Harmonik Osilatör Denkleminin Genel Çözümü .....</b>	<b>33</b>



## TABLULAR DİZİNİ

Tablo	Sayfa
<b>Tablo 2.1.</b> Brown hareketleri konulu İlk 25 Araştırma Alanı .....	<b>12</b>
<b>Tablo 2.2.</b> Brown Hareketleri Konusunda En Çok Çalışma Yapılan Ülkeler .....	<b>14</b>
<b>Tablo 2.3.</b> Brown Hareketleri Konusunda En Çok Yayın Yapan Dergi İsimleri.....	<b>15</b>
<b>Tablo 2.4.</b> Brown Hareketleri hakkında Yayınlanan Makalelerin WOS İndeksi İçinde Hangi İndeksler Tarafından Tarandığı.....	<b>16</b>
<b>Tablo 2.5.</b> Brown Hareketleri Konusu ile En Çok Atıf Alan İlk 25 Makalenin Yazarları, Dergi İsimleri ve Yıl Başına Düşen Ortalama Atıf Sayıları.....	<b>16</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Kütle Yay sistemi .....	3
Şekil 1.2. Sönümlü Kütle Yay Sistemi.....	6
Şekil 2.1. Brown Hareketleri Konusunda Toplam Atıf Sayılarının Yıllara Göre Değişimi .....	11
Şekil 2.2. Brown Hareketleri Konusunda Yıllara Göre Yayın Sayıları .....	12
Şekil 2.3. Brown Hareketleri Konusunda Araştırma Alanlarına Göre Toplam Atıf Sayıları .....	13
Şekil 3.1. $\langle x^2 \rangle$ ile $t$ 'nin zamanla değişim grafiği .....	23
Şekil 3.2. $\langle v^2 \rangle$ nin $\tau$ ile değişimi.....	29

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$k$	Yay sabiti
$x$	Konum
$m$	Kütle
$t$	Zaman
$H$	Hamiltonyen
$P$	Momentum
$H$	Planck sabiti
$\hat{a}$	Yoketme işlemcisi
$\hat{a}^+$	Yaratma işlemcisi
$E_n$	Enerji seviyeleri
$F$	Kuvvet
$V$	Hız
$U$	Potansiyel enerji
$T$	Sıcaklık
$k_B$	Boltzman sabiti
$a$	Brown parçacığının yarıçapı
$B$	Dalgalı kuvvetin büyüklüğü
$N_A$	Avagadro sayısı
$R$	İdeal gaz sabiti
$\beta$	Viskoz ortamda sönümlenme katsayısı
$\mu$	Viskozite sabiti
$\phi$	Faz acisi
$\gamma$	Sönüm parametresi
$\omega$	Açısal frekans

## **Kısaltmalar**

WOS	Web of Science
SCI-EXPANDED	Science Citation Index Expanded
ESCI	Emerging Sources Citation Index
SSCI	Social Sciences Citation Index
A&HCI	Arts & Humanities Citation Index



## GİRİŞ

Gerek günlük hayatımızda ve gerekse mikro dünyadan evrenin tamamına bakıldığında her şeyin sürekli hareket halinde olduğunu görürüz. Bu hareketleri bazen bir ses dalgası olarak işitir bazen de ışık dalgası olarak görürüz. Bu hareketler ise çoğu zaman titreşimler şeklinde kendini gösterir. Bir müzik aletinden çıkan ve kulağa hoş gelen melodiler bu titreşimlerin sonucudur. Salıncakta sallanan bir çocuğun denge noktası etrafında bir ileri bir geri gitmesi de yine bir titreşim hareketidir. Salıncağa dışarıdan müdahale edilmezse bir müddet sonra hareketleri yavaşlayacak ve duracaktır. Şayet dışarıdan bir ek kuvvet uygulanırsa hareketini sürdürecektir ve hatta anormal bir genlikte hareket edecektir. Atomik yapılarda da benzer durumlarla karşılaşılır. Bir molekülü oluşturan atomlar denge noktaları etrafında titreşim hareketi yaparlar. Dışarıdan ek bir ısı verildiğinde ya da soğutulduğunda, hareket hızlanacak ya da yavaşlayacaktır. Katılarda bir kristal örgüyü oluşturan atomlarda da benzer titreşimler görülür. Tüm bu hareketler gezegenlerde ve yıldızlarda da görülmektedir. Bu titreşim hareketleri bir denge noktası etrafında düzenli bir şekilde gerçekleşirse bu tür harekete harmonik hareket denir (Thornton ve Marion,2011). Bazen incelenen sistem denge noktasının iki tarafında aynı şekilde davranmaz. Denge noktası civarında harmonik harekete yakın davranmasına rağmen, denge noktasından uzaklaştıkça harmonikliği bozulan bu harekete anharmonik ( harmonik olmayan ) hareket denir. Bazı durumlarda ise tek bir denge noktasından bahsetmek mümkün olmayabilir. Bu sistemlere ise lineer olmayan sistemler denir. Lineer olmayan sistemlerde başlangıç noktasına olan duyarlılık tüm sistemin hareketini etkilediğinden, öngörülemeyen durumlarla karşılaşılabilir. Bu tür sistemlere de kaotik sistemler denir. Genel olarak tüm bu hareketlere osilatör ( titreşici ) denilmektedir.

Teorik ve matematiksel fizikte model geliştirmek çok önemlidir. Geliştirilen model fiziksel sistemin başlangıç ve sınır değer koşullarına uygun şekilde çözümlenerek incelenen fiziksel sistem hakkında kapsamlı bilgi elde edilir. Osilatör modeli de fizikte en çok kullanılan modeldir. Moleküllerin ve kristal örgüdeki atomların titreşimleri, atom çekirdeklerinde nükleonlar arası titreşimlerde, bir müzik aletinin tellerindeki titreşimlerde, bir laser demetinin hareketinin incelenmesinde osilatör modeli kullanılır. Bu tez çalışmasında öncelikle osilatörler hakkında genel bilgiler verilmektedir. Osilatörler hem klasik anlamda hem de kuantum mekaniği açısından ele alınmaktadır. Bu çalışmada osilatörlerin çok geniş uygulama alanları içinden, son yıllarda tekrar popüler hale gelen Brown hareketleri incelenmektedir. İlk olarak Robert Brown tarafından 1828 yılında sıvı yüzeyinde asılı duran toz ve polen parçacıklarının rastgele hareketler yapmasının gözlemlenmesiyle başlayan süreç, daha sonra gaz ortamlarda da görüldü. Uzun süre bunun nedeni konusunda doyurucu bir açıklama yapılamadı. 1905 yılında Albert Einstein, bu rastgele hareketlerin sebebi olarak, sıvı ya da gaz içindeki moleküllerin toz ya da polen parçacıklarına art arda sürekli çarpmasının yol açtığını açıklayan ünlü makalesinin yayımlanmasıyla konu açıklığa kavuştu

( Einstein,1905). Daha sonra 1909 da Jean Perrin, deneysel olarak Einstein in modelini test etti ve doğruluğunu kanıtlandı. Böylece varlığı bilinse de kesin delillerle moleküllerin varlığı kanıtlanmış oldu. (Perrin, 1909). Daha sonra farklı şekillerde konu tekrar ele alındı. Uzun bir süre ilgi çekmeyen ya da üzerinde fazla çalışılmayan Brown hareketleri konusu, 1980 lerden itibaren giderek artan bir hızla ilerledi. Bugün sadece fizikte değil, mühendislikte, astronomide, kimyada, tıpta, ekonomide borsa hesaplarında ve hatta sosyal bilimlerde olmak üzere çok geniş bir yelpazede çalışma alanı kazanmıştır.

Tez çalışmasında önce Brown hareketleri konusunda son 20 yıllık dönemde yapılan çalışmalar, Web of Science ( WOS ) veri tabanı kullanılarak bibliyografik olarak incelemektedir. Daha sonra Einstein ve Langevin modelleri özetlendi. Harmonik osilatör modeliyle Brown hareketi ele alındı. Tez çalışmasında özel olarak kütlesi zamana bağlı olarak değişen osilatörleri model alıp, Brown hareketleri çalışıldı. Böylece, sıvı ya da gaz ortamda asılı duran mikro ya da nano ölçekteki partiküllerin hareketleri sırasında birbirlerine yapışarak kütle kazanmaları ve bunun hareketlerine olan etkileri incelendi. Son olarak elde edilen sonuçlarla literatürdeki sonuçların bir değerlendirmesi yapıldı.

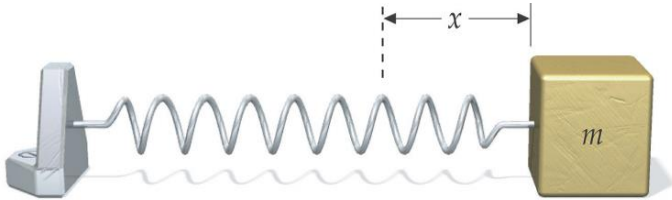
## 1.BÖLÜM

### KLASİK VE KUANTUM OSİLATÖRLER

Fizikte salınım yapan sistemlerin ve dalga hareketinin mantığını anlayabilmek ve açıklayabilmek adına kullandığımız sistemler osilatörlerdir. Cisim üzerine etki eden kuvvetin konumuna bağlı olarak cismi tekrar denge noktasına getirmesi sonucu oluşan hareketin modellemesidir. Osilatörler bir denge noktası etrafında aynı hareketin tekrarlanması sonucu sürekli kendini tekrarlayan harekettir (Greiner, 2003). Osilatörlerin belirli frekansta veya değişen frekansta olma durumu olabilir. Hareketi incelemek için sinüzoidal dalgalardan yararlanılır. Doğada osilatörü birçok hareketin açıklamasında kullanabiliriz. Bir gitarın teline vurduğumuzda telin titreşim yapması, bir kaykaycının kaykay rayı üzerinde gidip gelme hareketi, duvardaki sarkaçlı saatin salınım yapması, gölün üzerinde yüzen bir tahta parçasının dalgalar üzerinde bir aşağı bir yukarı salınması, ses dalgasının moleküller tarafından iletilmesi, atomların titreşimi gibi hareketlerin hepsinde salınım hareketi temel alınır (Goldstein, 2001). Klasik fizikte ve kuantum fiziğinde birçok olayın açıklanmasında osilatörlerden faydalanılır (Thornton ve Marion, 2011).

#### 1.1.Harmonik Osilatör

Bir yaya bağlı kütleye veya bir ipe bağlanan bir kütleye ilk hareket verildikten sonra bırakıldığında kütlelerin bir denge noktası etrafında salınım hareketi yaptığını gözlemleriz.



Şekil 1.1. Kütle yay sistemi

Buradaki salınım hareketinin temelinde denge noktasına kütleyi tekrar çeken bir kuvvet söz konusudur. Kütle denge noktasından uzaklaştıkça kuvvet devreye girer kütle maksimum uzanıma ulaştıktan sonra kuvvetin etkisi ile durarak tekrar denge noktasına döner. Denge noktasında bir hızı olması sebebi ile hareketine devam eder ve yine uzanım maksimum olduğunda hız sıfırlanarak denge noktasına tekrar döner. Burada yayın sahip olduğu potansiyel enerji cisme kinetik enerji olarak aktarılır. Cisim kazandığı kinetik enerji daha sonra yayda potansiyel enerjiye dönüşür. Bu dönüşüm sürekli birbirine aktarılarak devam eder. Bu dönüşümü sağlayan kuvvettir. Yayda uzama veya sıkışma olduğunda kuvvet devreye

girerek hareketin devamını sağlar. Hareketi tekrarlatan bu kuvvet geri çağırıcı kuvvettir. Bu hareket titreşim veya salınım hareketi olarak incelenir. Titreşen bir telin hareketi, vurduğumuzda titreyen bir davul zarının hareketi, LC devreleri, bir sarkacın denge noktası etrafındaki salınımı, su dalgalarının hareketi, yay dalgalarının hareketi gibi salınım yapan tüm sistemler için harmonik osilatörü bir modelleme olarak kullanabiliriz( Landau ve Lifshitz, 1969). Harmonik osilatörde geri çağırıcı kuvvet ve uzanım arasındaki ilişki Hooke Yasası ile ifade edilir ( Morin, 2007). Harmonik osilatörün klasik fizikteki çözümü için Hooke yasası ve Newton'un hareket yasasına göre

$$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x} \quad (1.1)$$

harmonik osilatörün açısal frekansı

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlarsak

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.3)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözüm

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (1.4)$$

Bu çözüm genliği  $x_0$ , fazı  $\omega_0$  olan  $\phi$  faz açısına sahip bir harmonik osilatörün hareket denklemdir. Parantez içindeki  $(\omega_0 t - \phi)$  ise osilasyonun fazıdır.

Klasik fizikte olduğu gibi kuantum mekaniğinde de harmonik osilatörlerden faydalanılır. Atom ve molekül boyutunda inceleme yapmak için kuantum mekaniğinden yararlanırız. Moleküllerdeki titreşim hareketini tasvir edebilmek için en uygun fiziksel yöntem harmonik osilatör modelidir

Kuantum mekaniğinde toplam enerjii anlatabilmek için Hamilton işlemcisinden faydalanılır(Zettili, 2009). Kuantum osilatör modelinde çözüm için Hamilton işlemcisi

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.5)$$

olarak belirlenir(Bes, 2012). Bu denklemde momentum işlemcisi yerine yazılırsa Hamilton işlemcisinin son hali

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.6)$$

olur ( Landau ve Lifshitz, 1977). Hamilton denkleminde

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (1.7)$$

yazarak, yaratma ve yok etme operatörleri cinsinden şu şekilde çözülür:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left( y + \frac{d}{dy} \right) \quad (1.8)$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left( y - \frac{d}{dy} \right) \quad (1.9)$$

olarak tanımlandığında (Erbil,2014) Hamilton işlemcisini

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) \quad (1.10)$$

şeklinde ifade ederiz. Özdeğer özfonksiyon eşitliğini yazarsak

$$\hat{H} |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle \quad (1.11)$$

$$\hat{a} \hat{a}^+ |\varphi_n\rangle = \left( \hat{H} + \frac{1}{2} \hbar\omega \right) |\varphi_n\rangle \quad (1.12)$$

$$\hat{a}^+ \hat{a} |\varphi_n\rangle = \left( \hat{H} - \frac{1}{2} \hbar\omega \right) |\varphi_n\rangle \quad (1.13)$$

denklemlerini elde ederiz. Her iki tarafı soldan  $\hat{a}^+$  işlemcisi ile çarparsak

$$\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ |\varphi_n\rangle = \left( E_n + \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \hat{a}^+ |\varphi_n\rangle \quad (1.14)$$

Her iki tarafı soldan  $\hat{a}$  işlemcisi ile çarparsak

$$\hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} |\varphi_n\rangle = \left( E_n - \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \hat{a} |\varphi_n\rangle \quad (1.15)$$

elde ettiğimiz denklemlerde aşağıdaki dönüşümler yapılırsa

$$\hat{a}^+ |\varphi_n\rangle = |\varphi_{n+1}\rangle \quad (1.16)$$

$$\hat{a} |\varphi_n\rangle = |\varphi_{n-1}\rangle \quad (1.17)$$

bu durumda enerji özdeğerleri

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega \quad (1.18)$$

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega \quad (1.19)$$

elde edilir(Erbil,2014). Bu durumun bizi götürdüğü sonuçta enerji seviyeleri için

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad n = 0,1,2 \dots \dots \quad (1.20)$$

sonucuna ulaşılır (Greensite 2017). Bu denklem bize enerjinin kesikli olduğunu göstermesi bakımından önemlidir. Yani atom içerisindeki enerjiye bakıldığında enerji her değeri almaz. Dolayısıyla atomun enerji seviyelerinden bahsedilir. Atom içerisinde enerji sürekli değil kesiklidir(Greensite, 2017;Bes, 2012).

## 1.2.Sönümlü Harmonik Osilatör

Harmonik osilatöre salınımı azaltan bir dış kuvvet uygulandığında osilatör sönümlü olur (Gitterman, 2005). Titreşimi azaltan ya da durduran bir sürtünme kuvveti veya sıvı içine daldırılan yaya bağlı bir kütleye sıvı tarafından etki eden kaldırma kuvveti olabilir. Bu durumda osilatörün enerjisi gittikçe azalır. Osilatörün enerjisi azaldıkça hareket sönümlenir. Bazı durumlarda bu sönüm istenmeyen bir durum iken bazı durumlarda titreşimin azalması istenmektedir(Vistnes, 2018). Örneğin deprem sırasında binaların yıkılmasını önleyebilmek veya arabaların herhangi bir engelden geçtiği zaman titreşim yapmasını engellemek sönümlü titreşimin istendiği ve sönümün artırılması için çalışıldığı durumlardır. Genelde dışarıdan etki eden ve hareketin sönümlenmesine neden olan direnç kuvveti cismin hızı ile orantılıdır. (Thornton ve Marion, 2011; Landau ve Lifshitz, 1969 )



**Şekil 1.2.** Sönümlü Kütle Yay Sistemi

Hareket sönümlü olduğu takdirde

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.21)$$

Burada  $\gamma$  sönüm parametresi olmak üzere denklem çözüldüğünde denkleminin çözümü

$$x = C \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) \cos(\omega_1 t + \Phi) \quad (1.22)$$

Burada C katsayısı başlangıç koşullarına bağlı olarak değişen sabittir (Gitterman, 2005). Bu çözüm bize sönüm parametresine bağlı olarak genliği giderek azalan bir hareketi anlatıyor. Çözüm sonucunda üç durum ortaya çıkar;

kritik altı sönüm  $\omega_0^2 > \gamma^2$ ; sistemin genliğinde zamanla daha hızlı bir azalma gözlenir.

kritik sönüm  $\omega_0^2 = \gamma^2$ ; sistem denge konumundan ilk hız verilmeden serbest bırakılırsa tekrar denge konumuna dönerek orada kalır.

kritik üstü sönüm  $\omega_0^2 < \gamma^2$ ; ortamda sönümü sağlayan direnç kuvveti geri çağırıcı kuvvetten daha büyük olduğu durumda sistem titreşim yapmaz ve denge konumuna döner.

### 1.3.Zorlanmış Harmonik Osilatör

Harmonik salıncıya dışarıdan bir kuvvet ile salınım hareketini destekleniyor ise zorlanmış harmonik osilatör olarak adlandırılır (Gitterman, 2005). Sistem dışarıdan bir kuvvet tarafından desteklenerek enerji eklenmesi sağlanmış olur (Vistnes, 2018). Çözümü yapılacak diferansiyel denklem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = A \cos(\Omega t + \beta) \quad (1.23)$$

şeklindedir (Gitterman, 2012(b)). Uygulanan kuvvetin frekansı ile osilatörün kendi frekansı birbirine eşit olduğu durumda rezonans olayı gerçekleşir ve osilatörün genliği maksimum olur. Denklemin çözümü ise

$$x(t) = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\omega t + \beta) \quad (1.24)$$

şeklinde olur (Gitterman, 2005).

#### 1.4.Zorlanmış, Sönümlü Harmonik Osilatör

Sistemi sönümleyici ve zorlayıcı kuvvetlerin olduğu durumda harmonik osilatör denklemini

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + 2\gamma \frac{dx}{dt} = A \cos(\Omega t + \beta) \quad (1.25)$$

şeklindedir (Gitterman, 2005). Bu denklemin çözümünde ise

$$x = C \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{A}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4\gamma^2 \Omega^2}{m^2}}} \sin(\Omega t + \phi + \beta) \quad (1.26)$$

sonucuna ulaşılır. Buradaki  $\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\gamma\Omega}$  olarak alınır.

#### 1.5.Çift Kuyulu Potansiyeldeki Doğrusal Olmayan Osilatör

Doğrusal bir osilatörde geri çağırıcı kuvvet  $x$ 'e bağlı olarak  $-kx$  ile ifade edilir. Bazı durumlarda geri çağırıcı kuvvet doğrusal olmayarak  $x$ 'in  $n$ . kuvvetine bağlı olarak değişebilir. Örneğin geri osilatör kuvveti  $ax - bx^n$  e bağlı bir fonksiyonla ifade edilebilir. Bu doğrusal olmayan osilatör durumunda potansiyel enerjide doğrusal formunun ( $U = kx^2/2$ ) dışında bir değer alabilir. Çift kuyu durumunda potansiyel enerji  $U = -ax^2/2 + bx^4/4$  şeklinde ifade edilir. Bu durumu ifade eden diferansiyel denklem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - ax + bx^3 = 0 \quad (1.27)$$

şeklinde verilir (Gitterman, 2005).

#### 1.6.Tek Kuyulu Potansiyeldeki Doğrusal Olmayan Osilatör

Doğrusal olmayan osilatörün potansiyel enerjisi  $U = -ax^2/2 + bx^3/3$  olduğu durumları ifade eden denklem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - ax + bx^2 = 0 \quad (1.28)$$

şeklindedir. Bu denklem hem sönümleyen bir kuvveti aynı zamanda hareketi destekleyen bir kuvveti içinde bulundurmaktadır (Gitterman, 2005).

### 1.7.Harici Gürültülü Harmonik Osilatör

Diğer sistemlerde sıcaklığın etkisini hiç hesaba katmadık. Ama sıfır sıcaklık değerinde olmayan durumları ifade edebilmek için aşağıdaki denklemi kullanırız.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + kx = \xi(t) \quad (1.29)$$

Burada  $\xi(t)$  sıfır ortalamalı bir değişkeni ifade eder.  $\langle \xi^2(t) \rangle$  ortamdaki termal gürültüyü ifade ettiği durumda dalgalanma sönümleme teoremi kullanılır(Gitterman, 2005).

### 1.8.Rastgele Frekanslı Harmonik Osilatör

Bazı durumlarda osilatörün frekansı zamanla değişebilir. Buna bir örnek

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + k(1 + \xi(t))x = A \sin(\Omega t) \quad (1.30)$$

şeklinde diferansiyel denklemle verilir( Gitterman, 2012(a)).

### 1.9.Rastgele Sönümlemeli Harmonik Osilatör

Osilatörün içinde bulunduğu ortamda ki sürtünme zamanla değişiyorsa aşağıdaki diferansiyel denklemle verilir:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma(1 + \xi(t)) \frac{dx}{dt} + kx = A \sin(\Omega t) \quad (1.31)$$

## 2.BÖLÜM

### BROWN HAREKETLERİ

1785 yılında Hollandalı botanikçi Jan Ingenhousz alkol içinde yüzen toz parçacıklarının hareket ettiğini gözlemledi (Wappler, 1789). 1828 yılında botanikçi Robert Brown'un suyun üzerinde polenlerin hareketini izlemesi ile ilk olarak ortaya çıktı. Robert Brown su üzerinde hareket eden polenlerin hareketini mikroskop altında incelediğinde polenlerin rastgele bir hareket yaptığını farketti. Bu hareketlerin açıklamasını başlangıçta canlı olabilme ihtimali üzerinde durdu. Daha sonra organik olmayan parçacıklarla aynı deneyi tekrarladığında olayın yaşamsal bir sebepten olmadığını anladı. Bu hareket mikroskop altında ayrıntılı olarak incelendiğinde hareketin bir salınım hareketi gibi belirli bir frekansla olmadığı ve harekette rastgelelik olduğu izlenildi. Hareket sıvıdaki parçacıkların cinsinden etkilenmemekte fakat sıvının cinsinden etkilenmekteydi. Bütün parçacıkların hareketi incelenirken küçük parçacıkların hareketinin daha da belirgin olduğu anlaşıldı. Bu sebeple mikroskop altında incelemek daha anlaşılır sonuçlara ulaşmaya sebep olmuştur (Brown, 1828). Bu olayın matematiksel olarak ilk çalışmaları 1880 yılında Thorvald N. Thiele tarafından yayınlanan makalede yapılmıştır(Thiele,1880). Daha sonra 1900 yılında borsa üzerine yapılan bir araştırmada Fransız matematikçi Louis Bachelier tarafından bu olay kullanılarak bir model geliştirilmiştir( Bachelier, 1900). Einstein yıllar sonra 1905 yılında bu olayı açıklayan bir makale yayınladı. Einstein ve Marian Smoluchowski, sıvılardaki kinetik teori sebebiyle su moleküllerinin rastlantısal olarak hareket ediyor olmaları gerektiğini fark etti. (Einstein, 1905; Smoluchowski,1906). Einstein Kinetik teorisinin açıklaması bu rastgele hareketin formülize edilmesini sağlamak ve atomların varlığını ispatlamak amacı ile bu makaleyi yayınlamıştır(Einstein,1956). Makalesinde Brown hareketlerinin sonuçlarının Avagadro sayısının deneysel olarak açıklaması sayılabileceğini gösterdi. Daha sonra 1909 yılında Jean Perrin, Einstein'ın makalesinde iddia ettiği atomların varlığını deneysel olarak ispatladı (Perrin, 1909). Bu önemli çalışma Perrin'e 1926 Nobel Fizik Ödülünü kazandı Polen tanelerinin hareketi sudaki moleküllerin varlığının ispatı olarak görüldü. Daha sonra 1924-1926 yılları arasında Theodor Svedberg kolloidlerle Einstein'ın Brown hareketi çalışmalarını doğruladı (Svedberg ,1906). Bu alandaki çalışmaları sırasında proteinleri birbirinden saf olarak ayırmaya yarayan bir teknik geliştirdi. Felix Ehrenhaft ise havada asılı kalmış gümüşü parçacıklarda aynı hareketi inceledi.

İlk olarak, Robert Brown tarafından, sıvı üzerinde rastgele hareket yapan polen taneciklerinin gözlemlenmesiyle başlayan Brown hareketleri üzerindeki araştırmalar, son yıllarda tekrar popüler hale gelmeye başladı. Brown hareketleri model olarak sadece fizikte değil, kimya, tıp, mühendislik, ekonomi gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadır. 1980'li yıllardan başlayarak makale sayısında ve yapılan çalışmalara atıflarda ciddi bir artış olduğu görülmektedir. Bu çalışmada, WOS veritabanı kullanılarak son 20 yılda (2001-2021 arasında) fizik alanında yapılan çalışmalar bibliyografik olarak incelenmektedir. (Özeren ve Yapar, 2022) Bu

incelemede, son 20 yıllık dönemde yıllara göre fizik alanında yapılan makale sayıları, atıf sayıları, en çok atıf alan çalışmalar, fiziğin alt dallarına göre çalışma sayıları, konu hakkında en çok yayın yapan araştırmacılar ve ülkeleri gibi bazı parametreler incelenmektedir. Makale sayısındaki artış ve yapılan makalelerin aldıkları atıflar göz önüne alındığında, son yıllarda konunun gerek temel bilimler açısından ve gerekse uygulamalı bilimlerde ilgi alanının giderek arttığı görülmektedir.

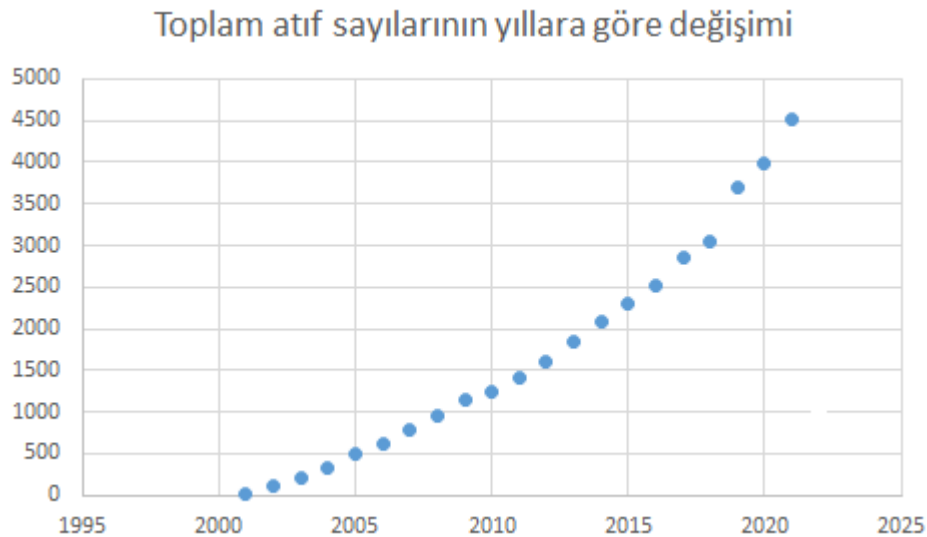
Bu çalışmanın esas amacı konuya temel bilim açısından yaklaşarak, Brown hareketlerini incelemektir. Brown parçacıkları nano ölçekte olduklarından, sıvı yüzeyinde moleküllerle çarpışarak titreşim hareketleri yaparlar. Bu titreşimler farklı osilatörlerle modellenilebilir. Çarpışmalar sırasında birbirlerine yapışarak kütlelerinin zamanla değişmesi kütlesi zamana bağlı osilatör ile modellenilebilir.

Proje kapsamında devam eden çalışmaya bir başlangıç olmak üzere ve Brown hareketleri konusunda şimdiye kadar bibliyografik bir araştırma yapılmamış olmasından dolayı bu çalışma, konu üzerinde araştırma yapmaya başlayacak olan araştırmacılar açısından da önemli olacaktır.

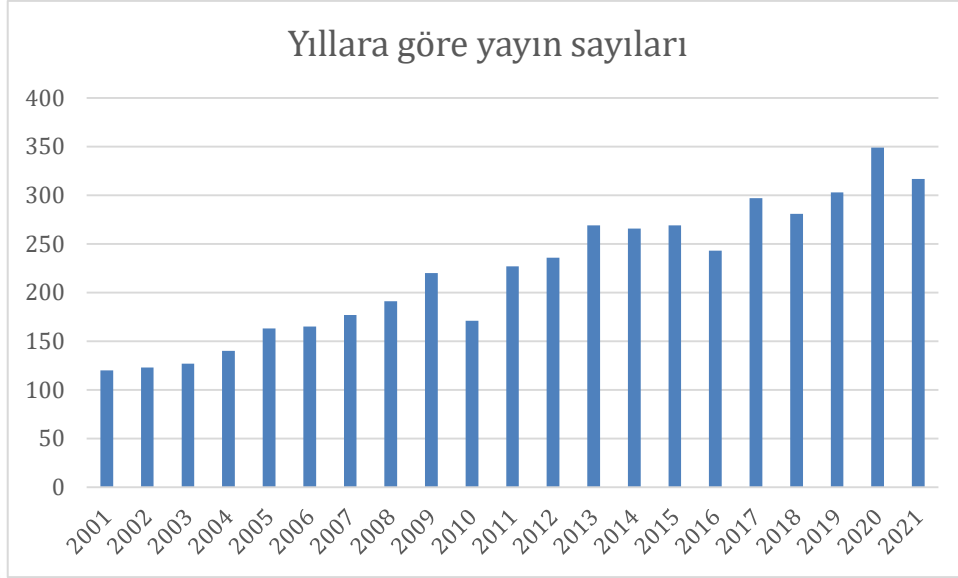
## 2.1. Brown Hareketleri Konusunda Yapılan Çalışmaların Analizi

Bu çalışmada Web of Science ( WOS ) veritabanı kullanılarak son 20 yıllık periyotta Brown hareketleri konusunda yapılan çalışmaların bibliyografik bir analizi yapılmaktadır.

Aşağıda Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de 2001-2021 yılları arasında yapılan makalelere yapılan atıf sayıları ve yapılan yıllık yayın sayıları gösterilmiştir.



**Şekil 2.1.** Brown hareketleri toplam atıf sayılarının yıllara göre değişimi



**Şekil 2.2.** Brown hareketleri konusunda yıllara göre yayın sayıları

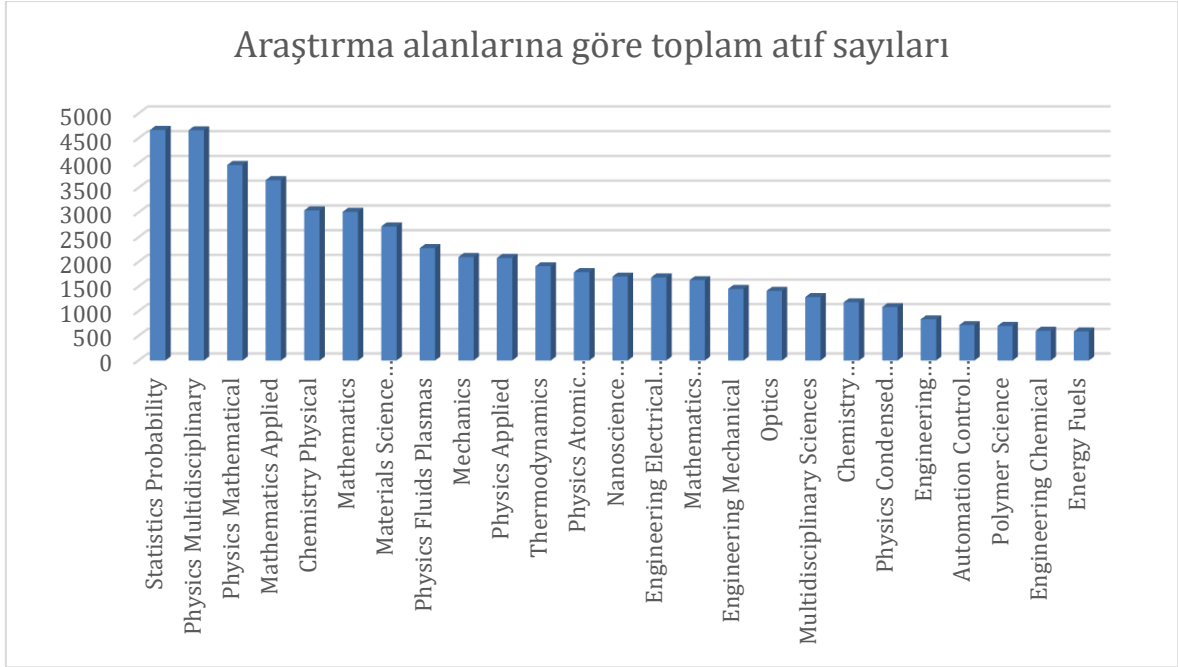
Şekillerden de görüleceği üzere gerek makale sayılarında ve gerekse atıf sayılarında her yıl ciddi bir artış olduğu görülmektedir. Söz konusu yıllar arasında WOS verilerine göre yapılan toplam yayın sayısı 4654 iken toplam atıf sayısı 58922 ve yayın başına ortalama atıf sayısı 12.66'dır. Yayınların h-indeksi ise 92 dir. Bu veriler konunun halen aktif şekilde çalışıldığının göstergesidir.

**Tablo 2.1.** Brown hareketleri konulu ilk 25 araştırma alanı

	Araştırma Alanı	Yayın sayısı		Araştırma Alanı	Yayın sayısı
1.	Matematik	2604	14.	Sosyal bilimler	54
2.	Fizik	1216	15.	Telekomünikasyon	38
3.	Mühendislik	370	16.	Astrofizik	33
4.	Bilgisayar Bilimleri	221	17.	Biyofizik	33
5.	Kimya	209	18.	Eğitim bilimleri	32
6.	Teknoloji	164	19.	Polimer bilimi	31
7.	Malzeme Bilimi	133	20.	Enstrümantasyon	30
8.	Ekonomi	129	21.	Ekoloji	27
9.	Mekanik	126	22.	Matematiksel Biyoloji	25
10.	Otomasyon sistemleri	124	23.	Moleküler biyoloji	22
11.	Optik	91	24.	Meteoroloji	19
12.	Termodinamik	75	25.	Fotoğraf ve görüntüleme teknolojisi	17
13.	Yönetim bilimleri	66			

Tablo 2.1 de en çok yayın yapılan ilk 25 araştırma alanı ve bu alanlarda yapılan yayın sayıları verilmektedir. Burada toplam yayın sayısının Brown hareketleri konusunda son 20 yılda

yapılan makale sayısından fazla olmasının sebebi, birbiriyle ilişkili disiplinler arasında yapılan çalışmaların tekrar sayılmasından kaynaklanmaktadır. Tablo 1den görüleceği üzere, gerek temel bilimlerde ve gerekse uygulamalı bilimlerde Brown hareketleri konusu önem arz etmektedir.



**Şekil 2.3.** Brown hareketleri konusunda araştırma alanlarına göre toplam atıf sayıları

Araştırma alanları incelendiğinde en çok istatistik olasılık ve fizik multidisipliner alanda çalışma yapıldığı görülmektedir.

**Tablo 2.2.** Brown hareketleri konusunda en çok çalışma yapılan ülkeler

	Ülkeler	Yayın Sayıları		Ülkeler	Yayın Sayıları
1.	Amerika	994	14.	İsrail	98
2.	Çin	883	15.	Güney Kore	98
3.	Fransa	584	16.	Ukrayna	91
4.	Almanya	442	17.	İsviçre	83
5.	İngiltere	304	18.	Avustralya	74
6.	Japonya	263	19.	Hollanda	74
7.	Hindistan	198	20.	Meksika	69
8.	Rusya	178	21.	Fas	61
9.	İtalya	161	22.	Tayvan	54
10.	Kanada	139	23.	Brezilya	52
11.	İspanya	122	24.	Finlandiya	50
12.	Polonya	120	25.	Pakistan	47
13.	İran	107			

Tablo 2.2, Brown hareketleri konusunda yapılan çalışmaların ülkeler bazında sayısal verilerini göstermektedir. Burada, makale başlığında Brown hareketleri geçen çalışmalar dikkate alınmıştır ve en çok yayın yapan ilk 25 ülke gösterilmiştir. Dünya sıralamasında birinciliği Amerika Birleşik Devletleri elinde tutarken, listede görülmeyen Türkiye, Dünya sıralamasında 33.sırada yer almaktadır.

**Tablo 2.3.** Brown hareketleri konusunda en çok yayın yapan dergi isimleri

Dergi isimleri	Yayın sayıları
PHYSICAL REVIEW E	185
STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS	135
STATISTICS PROBABILITY LETTERS	134
STOCHASTIC ANALYSIS AND APPLICATIONS	91
JOURNAL OF THEORETICAL PROBABILITY	88
ANNALS OF PROBABILITY	84
ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY	79
ANNALES DE L INSTITUT HENRI POINCARÉ PROBABILITÉS ET STATISTIQUES	67
ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY	67
PHYSICA A STATISTICAL MECHANICS AND ITS APPLICATIONS	65
JOURNAL OF PHYSICS A MATHEMATICAL AND THEORETICAL	59
PROBABILITY THEORY AND RELATED FIELDS	47
JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS	45
JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS	42
JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS	41
JOURNAL OF APPLIED PROBABILITY	38
COMMUNICATIONS IN STATISTICS THEORY AND METHODS	37
PHYSICAL REVIEW LETTERS	37
BERNOULLI	36
STOCHASTICS AN INTERNATIONAL JOURNAL OF PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES	36
STOCHASTICS AND DYNAMICS	36
LECTURE NOTES IN MATHEMATICS	35
JOURNAL OF STATISTICAL MECHANICS THEORY AND EXPERIMENT	34
POTENTIAL ANALYSIS	34
ANNALS OF APPLIED PROBABILITY	31

Tablo 2.3 de, Brown hareketleri konu başlığında en çok makale basılan dergi isimleri ve dergilerde çıkan yayın sayıları verilmektedir. Bu tablodan, istatistiksel fizik, matematiksel fizik ve uygulamalı matematik alanlarında daha çok yayın yapıldığı görülmektedir.

**Tablo 2.4.** Brown hareketleri hakkında yayınlanan makalelerin WOS indeksi içinde hangi indeksler tarafından tarandığı

Web of Science Index	Yayın sayısı
Science Citation Index Expanded (SCI-EXPANDED)	3876
Conference Proceedings	495
Emerging Sources Citation Index (ESCI)	282
Social Sciences Citation Index (SSCI)	142
Book Citation Index	149
Arts & Humanities Citation Index (A&HCI)	6

Tablo 2.4 de, yayınlanan makalelerin WOS indeksi içinde hangi indeksler tarafından tarandığını göstermektedir. Yayınların büyük çoğunluğunun SCI Extended dergilerde yayımlandığı görülmektedir.

**Tablo 2.5.** Brown hareketleri konusu ile en çok atıf alan ilk 25 makalenin yazarları, dergi isimleri ve yıl başına düşen ortalama atıf sayıları

Makale adı	Yazarlar	Dergi adı	Yayın yılı	Toplam atıf	Yıl başına ortalama atıf
Role of Brownian motion in the enhanced thermal conductivity of nanofluids	Jang, SP; Choi, SUS	APPLIED PHYSICS LETTERS	2004	1226	64,53
Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications Introduction	Biagini, Francesca; Hu, Yaozhong; Oksendal, Bernt; Zhang, Tusheng	STOCHASTIC CALCULUS FOR FRACTIONAL BROWNIAN MOTION AND APPLICATIONS	2008	493	32,87
Brownian-motion-based convective-conductive model for the effective thermal conductivity of nanofluids	Prasher, Ravi; Bhattacharya, Prajesh; Phelan, Patrick E.	JOURNAL OF HEAT TRANSFER-TRANSACTIONS OF THE ASME	2006	390	22,94
Mean square displacement analysis of single-particle trajectories with localization error: Brownian motion in an isotropic medium	Michalet, Xavier	PHYSICAL REVIEW E	2010	370	28,46
Brownian motion of an ellipsoid	Han, Y.; Alsayed, A. M.; Nobili, M.; Zhang, J.; Lubensky, T. C.; Yodh, A. G.	SCIENCE	2006	365	21,47
Role of Brownian motion hydrodynamics on nanofluid thermal conductivity	Evans, W; Fish, J; Koblinski, P	APPLIED PHYSICS LETTERS	2006	353	20,76
Probing short-range protein Brownian motion in the cytoplasm of living cells	Di Rienzo, Carmine; Piazza, Vincenzo; Gratton, Enrico; Beltram, Fabio; Cardarelli, Francesco	NATURE COMMUNICATIONS	2014	342	38
G-expectation, G-Brownian motion and related Stochastic calculus of ito type	Peng, Shige	Stochastic Analysis and Applications	2007	333	20,81
Phase-noise measurement in a cavity with a movable mirror undergoing quantum	Giovannetti, V; Vitali, D	PHYSICAL REVIEW A	2001	327	14,86

Brownian motion					
From diffusion to anomalous diffusion: A century after Einstein's Brownian motion	Sokolov, IM; Klafter, J	CHAOS	2005	294	16,33
NMR survey of reflected Brownian motion	Grebenkov, Denis S.	REVIEWS OF MODERN PHYSICS	2007	288	18
Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes	Park, C; Padgett, WJ	LIFETIME DATA ANALYSIS	2005	286	15,89
Making Sense of Brownian Motion: Colloid Characterization by Dynamic Light Scattering	Hassan, Puthusserickal A.; Rana, Suman; Verma, Gunjan	LANGMUIR	2015	281	35,13
Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation	Peng, Shige	STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS	2008	280	18,67
Function Spaces and Capacity Related to a Sublinear Expectation: Application to G-Brownian Motion Paths	Denis, Laurent; Hu, Mingshang; Peng, Shige	POTENTIAL ANALYSIS	2011	272	22,67
Active Brownian motion tunable by light	Buttinoni, Ivo; Volpe, Giovanni; Kuemmel, Felix; Volpe, Giorgio; Bechinger, Clemens	JOURNAL OF PHYSICS CONDENSED MATTER	2012	270	24,55
Nanofluid flow and heat transfer between parallel plates considering Brownian motion using DTM	Sheikholeslami, Mohsen; Ganji, Davood Domiri	COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING	2015	266	33,25
Ergodic properties of fractional Brownian-Langevin motion	Deng, Weihua; Barkai, Eli	PHYSICAL REVIEW E	2009	265	18,93
The visibility graph: A new method for estimating the Hurst exponent of fractional Brownian motion	Lacasa, L.; Luque, B.; Luque, J.; Nuno, J. C.	EPL	2009	256	18,29
Direct observation of the full transition from ballistic to diffusive Brownian motion in a liquid	Huang, Rongxin; Chavez, Isaac; Taute, Katja M.; Lukic, Branimir; Jeney, Sylvia; Raizen, Mark G.; Florin, Ernst-Ludwig	NATURE PHYSICS	2011	245	20,42
Resonances arising from hydrodynamic memory in Brownian motion	Franosch, Thomas; Grimm, Matthias; Belushkin, Maxim; Mor, Flavio M.; Foffi, Giuseppe; Forro, Laszlo; Jeney, Sylvia	NATURE	2011	241	20,08
Fractional Brownian Motion Versus the Continuous-Time Random Walk: A Simple Test for Subdiffusive Dynamics	Magdziarz, Marcin; Weron, Aleksander; Burnecki, Krzysztof; Klafter, Joseph	PHYSICAL REVIEW LETTERS	2009	241	17,21
CuO-water nanofluid flow due to magnetic field inside a porous media considering Brownian motion	Sheikholeslami, Mohsen	JOURNAL OF MOLECULAR LIQUIDS	2018	227	45,4
Fundamental aspects of quantum Brownian motion	Hanggi, P; Ingold, GL	CHAOS	2005	209	11,61
Accumulation of Microswimmers near a Surface Mediated by Collision and Rotational Brownian Motion	Li, Guanglai; Tang, Jay X.	PHYSICAL REVIEW LETTERS	2009	198	14,14

Tablo 2. 5 de, en çok atıf alan ilk 25 makalenin yazarları, dergi isimleri ve yıl başına düşen ortalama atıf sayıları verilmektedir.

## 3.BÖLÜM

### OSİLATÖR MODELLERİYLE BROWN HAREKETİNİN İNCELENMESİ

Sıvı ya da gaz ortamlarda asılı duran parçacıkların hareketine sebep olan etkinin ne olduğunu matematiksel olarak analiz etmeyi ilk başaran Einstein (Einstein, 1905) olmuştur. Einstein ilgili çalışmasında Brown parçacıkları adı verilen ve büyüklükleri mikro ve nano ölçekler arasında yer alan parçacıkları kendilerinden çok daha küçük ancak sayısal olarak daha çok olan moleküllerin rastgele çarpışmaları sonucunda hareket ettiklerini düşündü. Bu rastgele hareketleri tamamen istatistiksel metodlarla hesapladı. Einstein'ın metodu, Perrin'in (Perrin, 1909 ) deneysel metodu ile kanıtlandığında moleküllerin varlığı ilk kez teorik olarak kanıtlanmış oldu. Bu çalışmada Langevin'in (Langevin, 1908) analitik metodunu ele alarak, önceki bölümde tanımlanan osilatör modeli ile Brown hareketleri incelenmektedir.

#### 3.1. Langevin Denklemi

Brown parçacıklarının özdeş ve küresel olduğunu kabul ederek, sıvı ya da gaz akışkan ortamda hareketlerini inceleyelim (Langevin, 1908; Coffey, Kalmykov, Waldron, 2004). Akışkan ortamın viskozitesi  $\eta$  ise ortam içinde parçacığa etki eden viskoz kuvveti Stokes tarafından

$$F_{vis} = -\beta \frac{dx}{dt} \quad (3.1.1)$$

İle verilir. Burada  $\beta = 6\pi\eta a$  ve  $a$  ise Brown parçacığının yarıçapıdır. Parçacıklarla moleküller arasında rastgele çarpışmalar sonucu oluşan kuvvete  $F$  dersek, Newton yasası gereği

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - \beta \frac{dx}{dt} \quad (3.1.2)$$

yazılabilir. (3.1.2) eşitliğine Langevin denklemi denir (Langevin,1908). Bu denklemde Brown parçacıklarına etki eden kaldırma kuvveti ağırlıkla dengelendiği için hesaba katılmadı. Burada  $m$  Brown parçacığının kütlesidir. Tek bir parçacık için (3.1.2) denklemini çözmek ve  $t$ 'ye bağlı olarak  $x$  parçacığın konumunu belirlemek oldukça zordur. Bunun sebebi, moleküllerin rastgele çarpışmaları sonucu Brown parçacığın etki eden rastgele  $F$  kuvvetinin varlığıdır. Ancak tek bir parçacık yerine çok sayıda parçacığı aynı anda ele aldığımızda, parçacıkların ortalama yerdeğiştirmeleri hesaplanabilir.  $t=0$  anında parçacıkların ortalama konumu (istatistiksel ortalaması)  $\langle x \rangle = 0$  ise, herhangi bir anda yine  $\langle x \rangle = 0$  olarak kabul edilir (Prigogine, 2017). Bu durumda,

$$\Delta x = x_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} \quad (3.1.3)$$

değerini hesaplamak suretiyle, bir boyutta Brown parçacıklarının ortalama konumdan ( $\langle x \rangle = 0$ ) sapma miktarı bulunabilir (Huang, 2005). (3.1.3) eşitliğinde  $x_{rms}$  , kare

ortalamalarının kareköküdür (Zwanzing, 2001). (3.1.2) eşitliğinden  $x_{rms}$  'yi hesaplamak için aşağıdaki eşitlikleri türetebiliriz:

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \quad (3.1.4)$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} = 2x \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

(3.1.2) eşitliğini soldan x ile çarparak ve (3.1.4) eşitliğini kullanarak

$$m \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} x^2 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = xF - \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} x^2 \quad (3.1.5)$$

Çok sayıda özdeş parçacığın hareketi incelendiğinden, (3.1.5) eşitliğinin ortalamasını hesaplayalım (Huang, 2005).

$$m \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \rangle \right] = \langle xF \rangle - \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) eşitliğinde ortaya çıkan  $\langle xF \rangle$  terimi, çarpışmaların rastgele tabiatından x ve F arasında korelasyon olmadığından sıfırdır. Böylece rastgele çarpışmalardan doğan F kuvveti ortadan kalkar (Mullin ve Brehem, 1989). (3.1.6) eşitliğinde sol taraftan ikinci terim, parçacıkların hızlarının kare ortalamasıdır. Termal denge durumunda istatistik mekanikte verilen Eş Bölüşüm Teoremi

$$m \langle v^2 \rangle = k_B T \quad (3.1.7)$$

şeklindedir (Mullin ve Brehem, 1989). Burada  $k_B$  Boltzmann sabitidir. Böylece (3.1.6) eşitliği

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - k_B T = - \frac{\beta}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} \quad (3.1.8)$$

olur. (3.1.8) eşitliği  $\langle x^2 \rangle$  ye göre sabit katsayılı homojen olmayan ikinci mertebeden diferensiyel denklemdir.  $t=0$ 'da  $\langle x^2 \rangle = 0$  ve  $\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = 0$  başlangıç koşuluyla (3.1.8) denkleminin çözümü

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\beta^2} \left[ \beta t + m \left( e^{-\frac{\beta}{m} t} - 1 \right) \right] \quad (3.1.9)$$

olarak hesaplanır. Brown parçacıklarının çok küçük kütleli olduğunu ve  $t \gg 0$  zaman sonrasını ele alırsak, (3.1.9) eşitliği

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\beta} t \quad (3.1.10)$$

elde edilir. (3.1.10) eşitliğine Einstein-Smoluchowski eşitliği denir (Einstein, 1905). Bu eşitlik Brown parçacıklarının  $x_{rms}$  değerinin zamanla doğrusal olarak arttığını gösteriyor.  $\beta = 6\pi\eta a$  ve  $k_B = \frac{R}{N_A}$  ( R gaz sabiti ve  $N_A$  Avagadro sayısı) yerine konursa

$$\langle x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A} t \quad (3.1.11)$$

sonucuna ulaşılır. Burada bilinen bütün değerler yerine yazıldığında ve deneysel parametreler de eklendiğinde avagadro sayısının tam olarak ortaya çıkması sonucu Einstein moleküllerin varlığını matematiksel olarak kanıtlamış oldu (Einstein, 1905).

### 3.2 Brown Hareketinde Harmonik Osilatör Yaklaşımı

(3.1.2) Langevin denklemleri, akışkan ortamın viskoz kuvvetini ve ortamdaki moleküllerle Brown parçacıklarının rastgele etkileşmesini içerir. Brown parçacıklarının harmonik bir potansiyelde bulunduğu ortamlarda incelenebilir. Bu durumda (3.1.1) eşitliği

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - \beta \frac{dx}{dt} - kx \quad (3.2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $k = m\omega_0^2$  yay sabitidir.  $-kx$  terimi harmonik potansiyelden ortaya çıkan bir kuvvettir. Bu terimin kaynağı örneğin elektromanyetik alan olabilir. Brown parçacıklarının elektriksel yüklerini hesaba katarsak elektromanyetik ortam içinde her bir Brown parçacığına dış elektromanyetik ortamın etki ettiği düşünülebilir. Bu etki harmonik ya da başka şekillerde olabilir. Bu yaklaşımda harmonik olarak kabul ediyoruz. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitliğini kullanarak

$$\frac{m}{2} \frac{d^2\langle x^2 \rangle}{dt^2} - k_B T = -\frac{\beta}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} - k\langle x^2 \rangle \quad (3.2.2)$$

denklemleri elde edilir (Gitterman, 2010).  $t=0$ 'da  $\langle x^2 \rangle = 0$  ve  $\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 0$  başlangıç koşuluyla (3.2.2) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde bulunur (Hansen ve Barat, 2003).

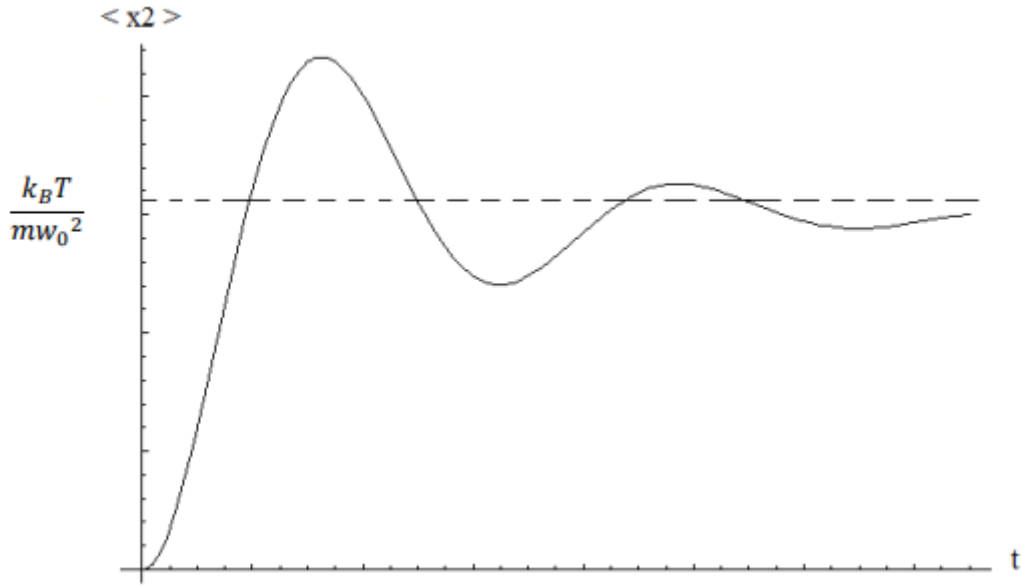
$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T e^{-\frac{(\beta+\alpha)t}{2m}} [\beta - \alpha] + k_B T e^{\frac{(\alpha-\beta)t}{2m}} [\beta - \alpha]}{2k\alpha} + \frac{k_B T}{k} \quad (3.2.3)$$

Burada  $\alpha = \sqrt{\beta^2 - 8km}$  bir sabittir. Uzun bir süre sonunda ( $t \gg 0$ ), (3.2.3) eşitliği

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{k} = \frac{k_B T}{m\omega_0^2} \quad (3.2.4)$$

değerine yaklaşır (Pathria ve Beale, 2011). Bu sonuç, harmonik dış kuvvetin etkisinde viskoz bir ortamda hareket eden Brown parçacıklarının  $x_{rms}$  değerinin zamanla sabit bir değere

gittiğini göstermektedir. Harmonik dış kuvvet olmadığında ise, (3.1.10) eşitliğinde bulunduğu gibi,  $x_{rms}$  değeri zamanla artmaktadır.  $\langle x^2 \rangle$  ile  $t$ 'nin zamanla değişim grafiği aşağıdaki gibidir.



**Şekil 3.1.**  $\langle x^2 \rangle$  ile  $t$ 'nin zamanla değişim grafiği

Şimdi sürücü dış kuvvetin zamanla değiştiği durumu ele alalım;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (3.2.5)$$

Burada  $\gamma = \frac{6\pi\eta a}{m}$ , viskozite katsayısı  $\eta$  olan akışkan içinde  $a$  yarıçaplı küresel Brown parçacığının sönüm katsayısıdır. Sistem başlangıçta dengede ise  $t$  anında konumu

$$x(t) = \int_{-\infty}^t G(t, t') F(t') dt' \quad (3.2.6)$$

İle verilir (Ek-1). Burada

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\frac{\gamma(t-t')}{2}} \sin[\omega_1(t-t')] , & t \geq t' \\ 0 , & t < t' \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Green fonksiyonudur.  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$  dür.

Akışkan içinde Brown parçacıklarıyla ortamdaki moleküllerin rastgele çarpışmalarından kaynaklanan rastgele  $F(t)$  fonksiyonu şu özelliğe sahiptir:

$$\begin{aligned}\langle F(t) \rangle &= 0 \\ \langle F(t)F(t') \rangle &= \Gamma \delta(t - t')\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

Burada  $\Gamma = 2\gamma m k_B T$  bir sabittir.  $\langle F(t)F(t') \rangle$  korelasyon fonksiyonudur. (3.2.8) eşitliği bir molekülün  $t$  anında Brown parçacığıyla çarpışmasının, başka bir  $t'$  anında çarpışmasına etki etmediği yani  $t$  ve  $t'$  anında yaptığı çarpışmalar arasında korelasyon olmadığı anlamına gelir. Bunu da matematiksel olarak açıklamak için  $\delta(t-t')$  ise Dirac Delta fonksiyonunu kullanmak uygun olur (Pathria ve Beale, 2011; Hassani ve Barrat, 2003).

$$\delta(t - t') = \begin{cases} 1, & t = t' \\ 0, & t \neq t' \end{cases}\quad (3.2.9)$$

$\langle x^2 \rangle$  değerini hesaplamak için (3.2.6) eşitliğinden

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{1}{m^2 \omega_1^2} e^{-\frac{\gamma(t-t_1)}{2}} e^{-\frac{\gamma(t-t_2)}{2}} \sin[\omega_1(t-t_1)] \sin[\omega_2(t-t_2)] \langle F(t_1)F(t_2) \rangle dt_1 dt_2\quad (3.2.10)$$

(3.2.8) denklemini (3.2.10)' da kullanırsak

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma}{m^2 \omega_1^2} e^{-\frac{\gamma(t-t_1)}{2}} e^{-\frac{\gamma(t-t_2)}{2}} \sin[\omega_1(t-t_1)] \sin[\omega_2(t-t_2)] \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2\quad (3.2.11)$$

(3.2.11) iki katlı integralini çözebilmek için, Dirac-Delta fonksiyonunun aşağıdaki özelliğini kullanabiliriz (Grosin, 2014);

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)\quad (3.2.12)$$

Böylece (3.2.11) integrali

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma}{m^2 \omega_1^2} e^{-\gamma(t-t')} \sin^2[\omega_1(t-t')] dt'\quad (3.2.13)$$

tek katlı integrale dönüşür. Şimdi  $y=t-t'$  integral dönüşümünü uygularsak

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma}{m^2 \omega_1^2} e^{-\gamma y} \sin^2[\omega_1 y] dy \quad (3.2.14)$$

elde edilir. (3.2.14) integrali reel ve analitik yöntemlerle kolayca hesaplanabilir ve sonuç olarak

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2\Gamma}{m^2(\gamma^3 + 4\gamma\omega_1^2)} \quad (3.2.15)$$

bulunur.  $\Gamma = 2\gamma m k_B T$  ve  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$  olduğundan

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m\omega_0^2} \quad (3.2.16)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç daha önce bulunan (3.2.4) ile aynıdır. Böylece genel bir rastgele kuvvet durumunda da  $\langle x^2 \rangle$  nin sabit bir sonuca ulaştığı anlaşılır.

### 3.3. Dalgalanma - Sönümlenme Eşitliği

(3.1.2) ile verilen Langevin denklemini hız cinsinden ifade edersek

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m}v = \frac{F(t)}{m} \quad (3.3.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Genel bir  $F(t)$  sürücü kuvveti için birinci mertebeden homojen olmayan diferensiyel denklemi çözmek için

$$v(t) = e^{-\frac{\beta}{m}t} y(t) \quad (3.3.2)$$

değişken dönüşümü yaparak (3.3.2)'nin türevini alırsak

$$e^{-\frac{\beta t}{m}} \frac{dy}{dt} = \frac{F(t)}{m}$$

ya da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{m} e^{\frac{\beta t}{m}} F(t) \quad (3.3.3)$$

elde edilir. (3.3.3)'ün integralini alırsak

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{m} \int_0^t e^{\frac{\beta t'}{m}} F(t') dt' \quad (3.3.4)$$

bulunur.  $t=0$ 'da  $y(0)=v(0)=0$  olduğundan

$$y(t) = e^{\frac{\beta t}{m}} v(t) + \frac{1}{m} \int_0^t e^{\frac{\beta t'}{m}} F(t') dt'$$

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{\beta(t-t')}{m}} F(t') dt' \quad (3.3.5)$$

elde edilir. Şimdi  $\langle v^2 \rangle$  ortalamasını elde etmek için (3.3.5)'den

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \frac{\langle F(t_1') F(t_2') \rangle}{m^2} e^{-\frac{\beta(t-t_1)}{m}} e^{-\frac{\beta(t-t_2)}{m}} dt_1' dt_2' \quad (3.3.6)$$

yazılabilir. Sürücü kuvvet için (3.2.8) eşitliklerini kullanarak

$$\langle F(t_1') F(t_2') \rangle = 2B \delta(t_1' - t_2') \quad (3.3.7)$$

Burada B, dalgali kuvvetin büyüklüğünün bir ölçüsüdür ( Pathria ve Beale, 2011 ). (3.3.7)'yi (3.3.6)'da yazarsak ve Dirac-Delta fonksiyonu için (3.2.12)'yi kullanırsak

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_0^t \frac{2B}{m^2} e^{-\frac{2\beta(t-t_1')}{m}} dt_1' \\ &= \frac{B}{\beta m} \left( 1 - e^{-\frac{2\beta t}{m}} \right) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

elde edilir.  $\langle v^2 \rangle$ ,  $t=0$ 'da  $\langle v^2 \rangle = 0$  ve  $t \rightarrow \infty$ 'da yani termik dengede  $\langle v^2 \rangle = \frac{B}{\beta m}$  olduğu görülmektedir. Bu ise zaman ilerledikçe dalgalanmanın kararlı bir duruma doğru geliştiğini göstermektedir (Prigogine, 2017). İstatiksel mekanikte, kararlı durumlar için eş bölüşüm teoremine göre

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (3.3.9)$$

olduğu bilinmektedir (Schwabl, 2005). Buna göre  $t \rightarrow \infty$  kararlı durumunda

$$B = \beta k_B T \quad (3.3.10)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe dalgalanma sönümlenme teoremi denir (Pathria ve Beale, 2011). (3.3.10) eşitliği dalgalanmaya sebep olan sürücü F kuvvetinin büyüklüğünün bir ölçüsü olan B ile, viskoz ortamda sönümlenme katsayısı olan  $\beta$  arasındaki dengeyi ifade eder. Bu denge durumu aynı zamanda termal denge anlamına da gelir (Prigogine, 2017).

### 3.4. Kütlesi Zamana Bağlı Osilatörler

Son yıllarda kütlesi zamana bağlı osilatörlere olan ilgi giderek artmaktadır. Bu türden problemler özellikle kuantum optiğinde, lineer ve lineer olmayan osilatörlerde (Goychuk ve Pöschel, 2021), moleküllerin ayrışmasında (Portman, Khasin, Shaw, Dykman, 2010),

biyolojide popülasyon dinamiğinde (Ellis, Petrovskaya ve Petrovski 2019), borsa dalgalanmalarında (Canessa, 2009 ), astrofizikte (Benz, 2000; Chandrashekhar, 1943 ) ve Brown hareketleri konusunda geniş araştırma alanına sahiptir. Rastgele değişken kütleli stokastik osilatörlerin detaylı incelenmesi için M. Gitterman'ın kitap ve makalelerine başvurulabilir (Gitterman, 2005, 2012(a), 2012(b) ).

Bu çalışmada, viskoz bir ortamda serbest hareket eden Brown parçacıklarına etki eden zamana bağlı rastgele dış kuvvetin (moleküllerin çarpışmasından kaynaklı) etkisiyle, çarpışarak parçacıkların birbirine yapışarak kütle kazanması problemi üzerinde durulmaktadır.

Kütlesi  $m=m(t)$  zamana bağlı ve harmonik potansiyelde bulunan Brown parçacığı için, Newton'un hareket yasasından

$$\frac{d}{dt} \left[ m(t) \frac{dx}{dt} \right] + \beta \frac{dx}{dt} + kx(t) = F(t) \quad (3.4.1)$$

yazılabilir. Burada  $\beta$  viskoz ortamda sönümlenme katsayısı ve  $F(t)$ , moleküllerin Brown parçacıklarına rastgele çarpışmasından kaynaklanan dış kuvvettir.  $kx(t)$  terimi harmonik kuvveti temsil eder. (3.4.1) denkleminde

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{m(t')} \quad (3.4.2)$$

değişken değişimi yapalım. Bu durumda

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{m(t)} \frac{d}{d\tau} \quad (3.4.3)$$

yazılır. Burada

$$F(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} F(t') dt' = \frac{dF}{dt} = v'(t)F[v(t)] - u'(t)F[u(t)] \quad (3.4.4)$$

Leibnitz kuralı kullanılmıştır(Hassani, 2013). (3.4.3)'ü (3.4.1)'de yerine yazarsak

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta \frac{dx}{d\tau} + km(t)x = m(t)F(t) \quad (3.4.5)$$

elde edilir. Bu denklem sürücü dış kuvvetin etkisinde frekansı zamanla değişen ve

$$\omega^2 = km(t) \quad (3.4.6)$$

ile verilen parametrik sönümlü osilatördür ( Gitterman, 2012(b), 2014).  $k=0$  özel durumunda,  $v=\frac{dx}{d\tau}$  olarak (3.4.5) denklemini

$$\frac{dv}{d\tau} + \beta v = \xi(\tau) \quad (3.4.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\xi(\tau) = m(t)F(t)$ 'dir. Bu denklem kütlesi zamanla değişen Langevin denklemidir. Zamanla kütlesi değişerek eylemsizlik momenti değişen Langevin tipi denklemler üzerine çalışmalar literatürde mevcuttur (Sprenger, Jahanshahi, Ivlev, Löwen, 2021). Bu çalışmada ise, sürücü dış kuvvetin etkisiyle kütlesi üstel artan Brown parçacıkları incelenmektedir.(3.4.7) denklemi (3.3.1) denklemine benzer şekilde çözülebilir.

$$v(\tau) = \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-\tau')} m(\tau')F(\tau')d\tau' \quad (3.4.8)$$

Ortamdaki moleküllerin rastgele çarpışmaları sonucu rastgele hareket eden Brown parçacıkları birbirlerine yapışarak kütle kazanabilirler (Gitterman ve Klyatskin,2010). Başlangıçta  $m_0$  kütlesine sahip olan bir parçacık art arda çarpışmalarla kütlesi artar. Bu kütle artışının üstel olarak değiştiği düşünülebilir. Burada bu artış

$$m(t) = m_0(2 - e^{-\lambda t}) \quad (3.4.9)$$

şeklinde alalım. Bu tür kütlesi üstel olarak artan osilatörler ilk olarak Caldirola ve daha sonra Kanai tarafından incelendi (Caldirola, 1941; Kanai,1948). Bu tür osilatörler özellikle kuantum optiğinde geniş uygulama alanı bulmaktadır (Scully ve Zubairy, 1997 ). (3.4.2)'de (3.4.9)'u yerine yazarsak

$$\tau = \frac{1}{2m_0\lambda} \ln(2e^{\lambda t} - 1) \quad (3.4.10)$$

sonucuna ulaşılır.  $t=0$ 'da  $m=m_0$  ve  $t \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow \infty$ )'da  $m \rightarrow 2m_0$  olduğundan burada kabul ettiğimiz modele göre  $m_0 \leq m \leq 2m_0$  aralığında bir kütle değişimi vardır.  $\langle v^2 \rangle$  değerini hesaplamak için (3.4.8)'den

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\tau \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-\tau'_1)} e^{-\beta(\tau-\tau'_2)} m(\tau'_1)m(\tau'_2) \langle F(\tau'_1)F(\tau'_2) \rangle d\tau'_1 d\tau'_2 \quad (3.4.11)$$

elde edilir. Burada

$$m(\tau) = \frac{2m_0 e^{2m_0\lambda\tau}}{e^{2m_0\lambda\tau} + 1} \quad (3.4.12)$$

olarak bulunur. (3.4.11)'de

$$\langle F(\tau'_1)F(\tau'_2) \rangle = 2B\delta(\tau'_1 - \tau'_2) \quad (3.4.13)$$

alırsak (Gitterman, 2011);

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\tau \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-\tau'_1)} e^{-\beta(\tau-\tau'_2)} \frac{8m_0^2 B e^{2m_0\lambda(\tau'_1+\tau'_2)}}{(e^{2m_0\lambda\tau'_1} + 1)(e^{2m_0\lambda\tau'_2} + 1)} \delta(\tau'_1 - \tau'_2) d\tau'_1 d\tau'_2 \quad (3.4.14)$$

Delta fonksiyonu için (3.2.12) özelliğini kullanırsak

$$\langle v^2 \rangle = 8m_0^2 B e^{-2\beta\tau} \int_0^\tau \frac{e^{(a+2b)\tau'_1}}{(1 + e^{b\tau'_1})^2} d\tau'_1 \quad (3.4.15)$$

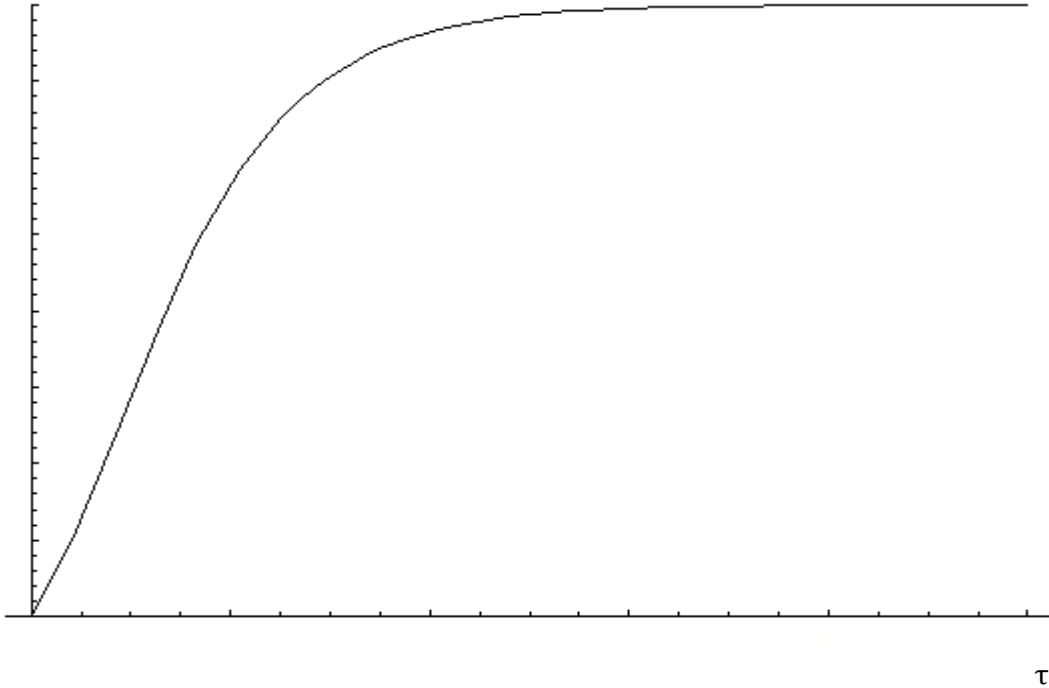
elde edilir. Burada  $a=2\beta$ ,  $b=2m_0\lambda$  kısaltmasını kullanalım. Sonuç olarak

$$\langle v^2 \rangle = \frac{4Bm_0^2}{b^2} e^{-a} \left[ \frac{2be^{(a+2b)}}{1 + e^b} - b - (a + b) \left( H\left(\frac{a}{2b}\right) - H\left(\frac{a+b}{2b}\right) \right) + \frac{2be^{(a+2b)}}{a + 2b} {}_2F_1\left(1, 2 + \frac{a}{b}, 3 + \frac{a}{b}, e^{-\beta}\right) \right] \quad (3.4.16)$$

sonucuna ulaşılır. Burada  $H(x)$ , harmonik sayı fonksiyonu ve  ${}_2F_1(c_1, c_2, c_3, c_4)$  ise hipergeometrik fonksiyondur (Wolfram, 2003).

$m_0=1$ ,  $\beta=0,5$ ,  $\lambda=0,5$  için  $\langle v^2 \rangle$  nin değişimi aşağıdaki gibidir.

$\langle v^2 \rangle$



**Şekil 3.2.**  $\langle v^2 \rangle$  nin  $\tau$  ile değişimi

## SONUÇ VE TARTIŞMA

Doğada bulunan her canlı ya da cansız varlıklar sürekli hareket halindedirler. Maddenin en küçük yapı taşı olan atomlar ve onları meydana getiren atomaltı parçacıklardan, evrenin en büyük nesnelere olan yıldızlara ve onlardan meydana gelen galaksilere kadar her varlığın durmaksızın hareket halinde olduğu görülmektedir. Bu hareketin içinde ise en dikkat çeken kuşkusuz titreşim hareketidir. Tez çalışmasında, fiziğin temel uğraşı alanlarından biri olan titreşim hareketi ele alındı. Titreşim hareketiyle ilgili temel düzeyde bir sınıflama tezin birinci bölümünde verildi. Konuyla ilgili literatürde çok sayıda kitap bulunabilir. Burada fiziğin farklı alanlarında karşılaşılan osilatörler ( titreşici ) kısaca özetlendi. Birbirinden çok farklı alanlarda model olarak osilatörler çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Sadece fiziğin araştırma alanlarında değil, kimyada, biyolojide, mühendislikte, ekonomide ve popülasyon dinamiğinde geniş uygulama alanları vardır. Tez çalışmasında bu uygulama alanlarından biri olan Brown hareketleri konusu ele alındı. İlk olarak 1800 lü yılların ikinci çeyreğinde, sıvı üzerinde asılı duran polen parçacıklarının rastgele hareketleri olarak gözlemlenen titreşim hareketlerinin, ilerleyen yıllarda çok farklı sonuçlara kapı araladığı görüldü. Yapılan bibliyografik incelemede, özellikle 1980 li yıllardan itibaren, Brown hareketleri denilen konunun, temel bilimlerin yanı sıra mühendislik ve hatta sosyal bilimlerde geniş uygulama alanı bulduğu görülmüştür. İkinci bölümde, bu uygulama alanları, yayın sayıları, atıf sayıları gibi farklı bibliyografik parametreler üzerinde durulmuştur.

Tezin üçüncü bölümünde ise, Brown hareketi yapan parçacıkların matematiksel analizi yapılmaktadır. Bu konuyla ilgili ilk detaylı çalışma A. Einstein tarafından yapılmıştır ( Einstein, 1905). Bu çalışmada ise Langevin dinamiği kullanılmaktadır (Langevin, 1908 ). Sıvı ya da gaz ortamda asılı duran parçacıkların boyutları, mikro ölçekten nano ölçeğe kadar değişmektedir. Mikroskop altında gözlemlenebilen bu parçacıklar, ortamdaki moleküllerle karşılaştırıldığında oldukça büyüktürler ( Bir molekülün yaklaşık 100 bin katı ). Sıvı ya da gaz ortamdaki moleküller sürekli hareket halindedirler. Bu hareketleri sırasında Brown parçacıklarına her yönden art ardına ve rastgele çarpırlar. Bu çarpımların etkisiyle parçacıklara etkiyen ve zamana bağlı olan rastgele bir dış kuvvet oluşur. Ayrıca parçacıklar, içinde buldukları ortamda bir viskoz ( sürtünme ) kuvvete maruz kalırlar. Langevin modeline göre, parçacıkların özdeş oldukları kabul edilerek, bu hareket incelenebilir. Ancak buradaki zorluk, kuvvetin rastgele olmasından dolayı hareketin de rastgele olmasıdır. Bu nedenle, tek bir parçacığın hareketi yerine, çok sayıda parçacığın hareketi ele alarak istatistiksel inceleme yapmak gerekir (Tsallis, 2009, Zwanzing,2001). Parametreleri zamanla rastgele değişen parçacıkların hareket denklemlerine “ stokastik denklemler” denilir (Le Gall, 2016). Bu bölümde incelenen Langevin denklemi de bu türden denklemlere bir örnektir. Stokastik denklemler ve fizikte uygulamaları için literatüre bakılabilir (Klyatskin, 2005). Langevin denkleminin öncelikle temel düzeyde çözümü yapılarak, parçacıkların konum ve hızlarının kare ortalamaları hesaplandı. Daha sonra, moleküllerin rastgele çarpışmalarının doğurduğu zamana bağlı rastgele kuvvetin yapısı göz önüne alınarak daha genel bir çözüm

yöntemi ele alındı. Burada temel yaklaşım, parçacıkların özdeş olması, hareketin bir boyutta izdüşümünün alınması ve bir  $t$  anında ki çarpmanın oluşturduğu kuvvetin hemen sonra  $t'$  anında ki çarpmanın oluşturduğu kuvvete bağlı olmaması yani iki kuvvet arasında bir korelasyonun olmadığı yaklaşımıdır. Buradan elde edilen sonuçların, dalgalanma-sönümleme teoremi olarak bilinen önemli bir sonuca götürdüğü görüldü. Bu teorem, sistemdeki parçacıkları sürekli hareket halinde tutmaya çalışan rastgele kuvvetle, parçacıkları yavaşlatıp durdurmaya çalışan viskoz kuvvetin arasında nasıl bir denge olması gerektiğini göstermesi bakımından önemlidir.

Bu çalışmada, ayrıca, Langevin yaklaşımından biraz farklı olarak, parçacıkların sabit kütle olmayacağı varsayımı yapılarak bir inceleme yapılmıştır. Parçacıklarla moleküllerin çarpışmaları, parçacıkların rastgele hareket etmesine sebep olurken, parçacıklar da birbirleriyle çarpışabilirler. Bu çarpışmalarda parçacıklar birbirlerine yapışarak kütle kazanabilirler(Gitterman, 2010). Kütleli zamanla değişen Brown parçacıklarıyla ilgili son yıllarda önemli çalışmalar yapılmaktadır (Gitterman ve Klyatskin, 2010 ). Bu çalışmada, kütle değişimi belirli bir sınır değer arasında tutularak ( başlangıç kütlelerinin en fazla iki katına kadar ), parçacıkların hızlarının zamanla değişimi incelenmiştir. Şekil 3.2 de kare hız ortalamasının zamanla değişiminin asimtotik olarak arttığı ve sabit bir değere yaklaştığı görülmektedir. Rastgele çarpışmaların ve oluşan rastgele kuvvetin etkisiyle rastgele hareket eden parçacıklar, zaman ilerledikçe kararlı bir harekete doğru yaklaşmaktadır. İstatistiksel olarak baktığımızda, termik dengeye ulaştığında enerjinin parçacıklar arasında eşit paylaşıldığı bir denge durumunun olduğu şeklinde yorumlayabiliriz. Bu da dalgalanma-sönümleme teoremine göre, sönümleyici kuvvetle sürücü kuvvet arasındaki denge durumuna geçişi göstermesi bakımından önemlidir.

Tez çalışmasında ele alınan problemler, parçacıkların klasik hareketleriyle ilgilidir ve bu nedenle klasik mekanik çerçevesinde incelenmektedir. Parçacıkların boyutları nano ölçek ve altında olması durumunda kuantum etkilerin de devreye gireceği açıktır. Bu türden problemler, kuantum Brown hareketleri konusuna girer ve ayrı bir araştırma alanıdır. Burada özellikle nano ölçek bölgesinde parçacıkları incelemek ilginç olabilir. Bu skalada bulunan parçacıklar hem klasik davranışlar sergilerken hem de kuantum özelliklerini muhafaza ederler. Klasik ve kuantum ara bölgesinde bulunan bölgede parçacıkların hareketleri koherent haller olarak bilinen bir yöntem sayesinde incelenebilir. Koherent hallerin yardımıyla yapılacak detaylı bir analizin literatüre önemli bir katkı sunacağı beklenebilir.

## KAYNAKLAR

- Bachelier, L. (1900). Theorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure*, (17), 21-86. <https://doi.org/10.24033/asens.476>
- Benz, W. (2000). From Dust to Planets, *Spatium*, (6), (3-15).
- Bes, D.R. (2012). *Quantum Mechanics*, Newyork: Springer
- Brown, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Philosophical Magazine*.( 4 )(21)(161173).  
<http://doi:10.1080/14786442808674769>.
- Caldirola, P., (1941). Quantum Analysis of Modified Caldirola-Kanai Oscillator Model for Electromagnetic Fields in Time-Varying. *IL Nuovo Cimento*, (18) (393-400).  
<http://dx.doi.org/10.1007/BF02960144>
- Canessa, E. (2009). Stock market and motion of a variable mass spring, *Physica A*, (388) (2168-2172)
- Chandrashekar, S. (1943). Stochastic Problems in Physics and Astronomy, *Reviews of Modern Physics*, (15), <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.15.1>
- Coffey, W.T., Kalmykov, Yu.P., Waldron, J.T. (2004) *The Langevin Equation*, Singapore: World Scientific
- Einstein, A. (1905). "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen" [On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat. *Annalen der Physik (in German)* (322)(8)(549-560). doi:10.1002/andp.19053220806
- Einstein, A. (1956). *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, (1926) New York: Dover Publications.
- Erbil, H. (2014). *Analitik ve Kuantum Mekaniği*, Ankara: Nobel Yayınları
- Ellis, J., Petrovskaya, N., Petrovski, S. (2019) Effect of density-dependent individual movement on emerging spatial population distribution: Brownian motion vs Levy flights, *J. Theor, Bio*, 464(159)
- Gitterman, M., (2005). *The Noisy Oscillator*, London: World Scientific,
- Gitterman, M., (2010). New stochastic equation for a harmonic oscillator: Brownian motion with adhesion, *Journal of Physics: Conference Series*(248)(012049), doi:10.1088/1742-6596/248/1/012049
- Gitterman, M., Klyatskin V.I. (2010). Brownian Motion with Adhesion: Harmonic Oscillator with Fluctuating Mass, *Physical Review E*, 81(5), 051139.
- Gitterman, M., (2012). a.). New Type of Brownian Motion, *Journal of Statistical Physics*, 146(1) 239-243.

- Gitterman, M. (2012)b.). Oscillator with Random Mass, *World Journal of Mechanics*, (2), 113-124  
doi:10.4236/wjm.2012.22013
- Gitterman, M., (2014). Stochastic oscillator with random mass: new type of Brownian motion, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier*, (395)(C) (11-21).
- Goldstein, H. (2001). *Classical Mechanics*(3. Basım), NewYork: Addison-Wesley Pub. Co.
- Goychuk, I.,Pöschel,T. (2021). Nonequilibrium Phase Transition to Anomalous Diffusion and Transport in a Basic Model of Nonlinear Brownian Motion, *Phys Rev Lett* (127), 1106.
- Greensite, J. (2017). *An Intrudaction to Quantum Theory*, Bristo: IOP Publishing Ltd.
- Greiner, W. (2003). *Classical Mechanics*, NewYork: Springer
- Grozin, A. (2014). *Intrudaction to Mathematica for Physicists*, Switzerland: Springer
- Hansen, J.P., Barrat J.L. (2003). *Basic Concepts for Simple and Complex Liquids*, Cambridge United Kingdom: Cambridge University Press
- Hassani, S.(2013). *Mathematical Physics*(2.basım), Switzerland: Springer
- Huang, K. (2005). *Lectures on Statistical Physics and Protein Folding*, Singapore :World Scientific
- Klyatskin, V.I.(2005). *Stochastic Equations through the Eye of the Physicist: Basic Concepts, Exact Results and Asymptotic Approximations*, NewYork: Elsevier Science,
- Kanai,E. (1948). On the Quantization of the Dissipative Systems, *Progress of Theoretical Physics*, 3(4), 440-442, <https://doi.org/10.1143/ptp/3.4.440>
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M. (1969). *Mechanics*, Oxford: Pergamon Press
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M. (1977). *Quantum Mechanics*, Oxford: Pergamon Press
- Langevin, P. (1908). Sur la théorie du mouvement brownien [On the Theory of Brownian Motion]. *C.R. hebdomadaire des séances de l'Académie des Sciences et des belles-lettres* (146) (530-532).
- Le Gall, J.F. (2016). *Brownian Motion, Martingales and Stochastic Calculus*, Switzerland: Springer
- Morin, D. (2007). *Intrudaction to Classical Mechanics*, New York: Cambridge University Press
- Mullin, W.J., Brehem,J.J. (1989). *Intrudaction to The Structure of Matter*, New York :Wiley
- Özeren, S.F., Yapar G. (2022). *Brown Hareketleri Bibliyografik Bir İnceleme*(Konferans Sunumu), Icean 2022 Proceeding Book (1598), Konya, Türkiye.
- Pathria, R.K., Beale, P.D. (2011). *Statistical Mechanics* (3. Basım),Oxford: Elsevier
- Perrin, J. (1909). Brownian movement and molecular reality, *Annales de chimie et de fizik*. 8(18), 5-114.
- Portman, J. Khasin.K.M.,Shaw,S.W.,Dykman,M.I. (2010). The Spectrum of an Oscillator with Fluctuating Mass and Nanomechanical Mass Sensing, *Bulletin of the American Physical Society March Meeting, Portland*, 55, 15-19.

- Prigogine, I. (2017). *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, New York: Dover Publications
- Scully, M.O., Zubairy, S. (1997). *Quantum Optics*, London: Cambridge University Press
- Schwabl, F. (2005). *Statistical Mechanics*, Berlin: Springer
- Smoluchowski, A. A. (1906). Test of a kinetic theory of Brownian motion and turbid media, *Bülten International de l'Académie des Sciences de Cracovie (Fransızca)*, 577.
- Sprenger, A.R., Jahanshahi, S., Ivlev, A.V., Löwen, H. (2021). Active Brownian motion in a viscoelastic medium, *Phys Rev E* (103) (042601)
- Svedberg, T. (1906). Über die Eigenbewegung der Teilchen in Kolloidalen Lösungen, *Zeitschrift für Elektrotechnik und Elektrochemie* (12)(47) (853–860).
- Thiele, T.N. (1880). *Sur la compensation de quelques erreurs quasi systematiques par la methode des moindres carrees*, Kobenhavn: Reitzel
- Thornton, S.T., Marion, J.B. (2004). *Classical Dynamics in Particles and Systems*, Belmont U.S.A.: Thomson Brooks/ Cole
- Tsallis, C. (2009). *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, New York : Springer
- Vistnes, I.A. (2018). *Physics of Oscillations and Waves*, Switzerland: Springer
- Wappler, C. F. (1789). *J. Ingen-Housz, in Vermischte Schriften physisch-medizinschen Inhalts*, Vienna
- Wolfram, S. (2003). *The Mathematica Book* ( Beşinci Basım), Wolfram Research
- Zettili, N. (2009). *Quantum Mechanics Concepts and Applications* ( İkinci Basım), London: Wiley
- Zwanzig, R. (2001). *Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Oxford: Oxford University Press

## EKLER



## EK 1. Zorlamalı Sönümlü Harmonik Osilatör Denkleminin Genel Çözümü

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (1)$$

Burada  $x(t)=e^{at}y(t)$  değişken dönüşümünü yapalım

$$\frac{dx}{dt} = ae^{at}y(t) + e^{at} \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{at} \frac{d^2y}{dt^2} + 2ae^{at} \frac{dy}{dt} + a^2 e^{at} y(t) \quad (3)$$

(2) ve (3)'ü (1)'de yerine yazalım

$$e^{at} \left[ \frac{d^2y}{dt^2} + (2a + \gamma) \frac{dy}{dt} + (a^2 + \gamma a + \omega_0^2) y \right] = \frac{F(t)}{m} \quad (4)$$

a sabitini, (4) denklemindeki 2. terimi sıfır yapacak şekilde seçebiliriz. Böylece  $a=-\gamma/2$  olur. (4) denklemi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) y = \frac{F(t)e^{\gamma t/2}}{m} \quad (5)$$

şeklini alır. Burada  $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$  alırsak, (5) denklemi  $\omega$  frekanslı zorlamalı bir osilatör olur. Şimdi,

$$\xi = \frac{dy}{dt} + i\omega y \quad (6)$$

Değişken dönüşümünü yapalım. Bu durumda (5) denklemi

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega \xi = \frac{1}{m} F(t)e^{\gamma t/2} \quad (7)$$

Birinci mertebeden diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin homojen çözümü,

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega \xi = 0 \quad (8)$$

$$\xi_h = Ae^{i\omega t}$$

Genel çözüm  $\xi = A(t)e^{i\omega t}$  formundadır. Bunu (7)'de yerine yazalım

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}e^{i\omega t} + i\omega Ae^{i\omega t} - i\omega Ae^{i\omega t} &= \frac{1}{m}F(t)e^{\gamma t/2} \\ \frac{dA}{dt}e^{i\omega t} &= \frac{1}{m}F(t)e^{\gamma t/2} \\ A(t) &= \int_0^t \frac{1}{m}F(t')e^{\gamma t'/2} e^{-i\omega(t-t')}dt' + A(0)\end{aligned}\quad (9)$$

Burada  $A(0)=\xi(0)=y(0)=x(0)=0$  alınırsa

$$\begin{aligned}\xi(t) &= e^{i\omega t} \int_0^t \frac{1}{m}F(t')e^{\gamma t'/2} e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \int_0^t \frac{1}{m}F(t')e^{\gamma t'/2} e^{i\omega(t-t')} dt'\end{aligned}\quad (10)$$

(10) denkleminde

$$e^{i\omega(t-t')} = \cos[\omega(t-t')] + i\sin[\omega(t-t')]\quad (11)$$

yazarak (6) eşitliğiyle karşılaştırırsak

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega} F(t')e^{-\gamma t'/2} \sin[\omega(t-t')]dt'\quad (12)$$

elde edilir.  $x(t)=e^{-\gamma t/2}y(t)$  olduğundan

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega} F(t')e^{-\gamma(t-t')/2} \sin[\omega(t-t')]dt'\quad (13)$$

genel çözümüne ulaşılır. Burada

$$\chi(t-t') = \frac{1}{m\omega} e^{-\gamma(t-t')/2} \sin[\omega(t-t')]dt'\quad (14)$$

cevap fonksiyonudur(Pathria ve Beale, 2011 ). Bu denklemin uygulamaları için ayrıca (Landau ve Lifshitz) bakılabilir.

